УДК 514.123
ББК 22.151

DOI: 10.31862/2073-9613-2020-3-115-124

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В СИСТЕМЕ MATHCAD ПОСРЕДСТВОМ ИНСТРУМЕНТАРИЯ КЛАССА R-ФУНКЦИЙ

Л.С. Выговская

Аннотация. *В статье рассматривается применение инструментария теории R-функций для решения обратной задачи аналитической геометрии. Описан метод аналитического представления областей сложной формы, рассматриваемых в современных задачах оптимизации. Приведены методические рекомендации по составлению MathCad-документов, а также решение конкретных примеров, иллюстрирующих способ визуализации картины линий уровня R-функции.*

Ключевые слова: *математика, аналитическая геометрия, система MathCad, обратная задача аналитической геометрии, теория R-функций.*

SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF ANALYTICAL GEOMETRY IN MATHCAD SYSTEM USING THE TOOLS OF THE R-FUNCTION CLASS

L.S. Vygovskaya

Abstract. *The article considers the application of the R-function theory tools for solving the inverse problem of analytical geometry. The method of analytical representation of complex form areas considered in modern optimization problems is described. Methodological recommendations on MathCad documents drafting are given, as well as the solution of specific examples illustrating the way of visualizing the picture of R-function level lines.*

Keywords: *mathematics, analytical geometry, MathCad system, inverse problem of analytical geometry, theory of R-functions.*

Вектор перехода от *школы знаний* к *школе решений* в контексте математического образования студента-бакалавра нацеливает на поиск внедрения в учебный процесс новых научных понятий с использованием современных компьютерных технологий для наглядной визуализации инструментария этих понятий.

В математическое содержание учебного курса входит ряд важных тем (оптимизационные задачи с линейными и нелинейными ограничениями и др.), предполагающих владение навыками работы с графическим материалом. Традиционно геометрическая информация (в задаче аналитического представления сложных геометрических областей) описывается системой уравнений или неравенств, что создает затруднения в случае модификации математических постановок с учетом динамики реального производственного или управленческого процесса. Однако эти трудности могут быть преодолены с помощью весьма простых средств, базирующихся на использовании методов алгебры логики и некоторых систем обычных функций непрерывных действительных аргументов — R-функций, подобных в некотором смысле функциям алгебры логики.

Для визуализации свойств R-функций целесообразно использовать систему MathCad, которая чрезвычайно проста для изучения и применения, так как ориентирована на привычный математический язык, на «живые» математические формулы и термины при вводе условий задачи и при выводе результатов решения.

Обратная задача аналитической геометрии

Обратная задача аналитической геометрии ставится следующим образом [1]: в R^n задан геометрический объект $\mathcal{L}$, требуется построить такую функцию $f(x)$, $x \in R^n$, чтобы уравнение $f(x) = 0$ удовлетворялось в тех и только тех точках пространства R^n, которые принадлежат $\mathcal{L}$. Под чертежом (в терминологии В.Л. Рвачева) понимают множество точек R^n, для которого с помощью некоторой системы функций (операций) H, путем образования их суперпозиций, можно написать соответствующее уравнение $f(x) = 0$.

В классической математике обратная задача ставилась и решалась в основном для простых объектов. Например, уравнение $1 - x^2 - y^2 = 0$ задает окружность. Левая часть этого уравнения (как и любого другого, рассматриваемого в аналитической геометрии) строится с помощью символов x, y, ..., констант, сложения, умножения — это и есть конструктивные средства для написания уравнений. Уравнения, которые можно написать с помощью системы $H_0 = \{x + y, xy, const\}$, имеют полиномиальный вид. Чертежи, которые им соответствуют, называются алгебраическими (кривые на плоскости, поверхности в пространстве и т.д.). Но среди алгебраических чертежей нет, например, такого простого чертежа, как квадрат. Возникает вопрос: нельзя ли так расширить систему H_0 до некоторой системы H, располагая которой можно было бы задавать сложные геометрические объекты не системами уравнений и неравенств, а ***одним уравнением,*** написанным в символах системы *H*? Положительным ответом на поставленный вопрос могут быть введенные в [там же] системы, названные *алгоритмически полными*.

Описательное и формальное определение R-функций

Среди функций непрерывных действительных аргументов имеются такие функции, знак которых вполне определяется заданием знаков аргументов и не зависит от их абсолютных величин. Такими свойствами обладают функции [там же]

$f_1 = xy$
$f_2 = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$
$f_3 = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$

и многие другие. В таблице 1 приведена зависимость знаков функций от знаков их аргументов:

Таблица 1

x	y	f_1	f_2	f_3
-	-	+	-	-
-	+	-	-	+
+	-	-	-	+
+	+	+	+	+

Таблица 2

X	Y	F_1	F_2	F_3
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Знак переменной величины можно рассматривать как двоичную переменную, считая, что знаку “+” соответствует значение истинности “1”, а знаку “–“ — значение ложности “0”. Выполнению операций над действительными величинами будут соответствовать некоторые операции для булевой функции, что видно из таблицы 2.

$$f_1 \to F_1 = X \sim Y\,;\; f_2 \to F_2 = X \wedge Y\,;$$

$$f_3 \to F_3 = X \vee Y\,.$$

Наряду с количественными характеристиками существуют действительные функции, являющиеся носителями и качественных свойств. Так, на действительной оси интервалы $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$ можно рассматривать как некоторые качественные градации действительной переменной величины. Из множества функций действительных аргументов выделяется класс *R*-функций [там же], для которых справедливо такое соответствие.

Вышесказанное относится к описательному определению *R*-функций. Чтобы формализовать данное определение, вводится в рассмотрение двоичная величина или предикат [там же].

$$X = S_2(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная и непрерывная на R^n : $R^n \to R$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, называется **R-функцией** [там же], если существует такая булева функция $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$: $B_2^n \to B_2$, $B_2 = \{0,1\}$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, что выполняется равенство

$$S_2(f(x)) = F(S_2(x)),$$

где $S_2(x) = (S_2(x_1), S_2(x_2), \ldots, S_2(x_n))$.

Например, для R-функции $f_2 = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ выполняется соотношение $S_2(f_2(x, y)) = S_2(x) \wedge S_2(y)$.

Основная система R-функций

Для использования методов теории R-функций важно свойство замкнутости множества R-функций: сложная функция (суперпозиция), составленная из R-функций, также является R-функцией.

Ниже приведен пример *достаточно полной* (по терминологии В.Л. Рвачева [там же]) системы, состоящей из R_α операций:

$$\begin{cases} \bar{x} \equiv -x, R_\alpha \text{— отрицание,} \\ x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}\right), \\ \qquad\qquad R_\alpha \text{— конъюнкция,} \\ x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}\right), \\ \qquad\qquad R_\alpha \text{— дизъюнкция,} \end{cases} \qquad (1)$$

где $-1 < \alpha \leq 1$.

При $\alpha \equiv 0$ система имеет вид системы R_0 операций

$$\begin{cases} \bar{x} \equiv -x, R_0 \text{— отрицание,} \\ x \wedge_0 y \equiv \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \qquad\qquad R_0 \text{— конъюнкция,} \\ x \vee_0 y \equiv \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \qquad\qquad R_0 \text{— дизъюнкция,} \end{cases} \qquad (2)$$

При $\alpha \equiv 1$ система имеет вид системы R_1 операций:

$$\begin{cases} \bar{x} \equiv -x, \\ x \wedge_0 y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right) \equiv \min(x, y), \\ x \vee_0 y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) \equiv \max(x, y), \end{cases} \qquad (3)$$

Во многих задачах требование дифференцируемости оказывается существенным, и тогда следует использовать следующие системы R-операций [1]:

$$\begin{cases} u \wedge_\alpha^\kappa v \equiv \left(u \wedge_\alpha v\right)\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^\kappa, \\ u \vee_\alpha^\kappa v \equiv \left(u \vee_\alpha v\right)\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^\kappa, \end{cases} \qquad (4)$$

где если функции u и v имеют непрерывные частные производные до k-го порядка, то и суперпозиция R-функций также обладает непрерывностью частных производных до k-го порядка включительно.

Пример алгоритмически полной системы доставляет система

$$H = \left\{x + y, xy, x \wedge^* y, \alpha, \alpha \in R\right\},$$

где $x \wedge^* y$ — какая-либо из приведенных выше R-конъюнкций (1)–(4). Очевидно, что в этом случае также используется и R-дизъюнкция $x \vee^* y$.

Алгоритм построения уравнения границы ($\partial\Omega$) произвольной области (Ω) при помощи класса R-функций

I шаг. *Декомпозиция области* Ω *(чертежа)* — выбор системы опорных областей $\Omega_i = \left\{\omega_i \geq 0\right\}_{i=1}^m$, необходимой для описания заданного чертежа Ω (количество опорных областей может быть разное). На этом шаге может быть использован весь арсенал средств аналитической геометрии, включая всевозможные прямые, окружности, эллипсы, гиперболы, параболы, кривые 3-го, 4-го и высших порядков, а также графики элементарных функций.

II шаг. *Композиция области* Ω — построение логической формулы и предиката (по В.Л. Рвачеву) вида $\mathbf{\Omega} = F\left(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m\right)$, где F — булева функция, представленная в общем виде суперпозицией операций $\wedge, \vee$ и отрицания.

III шаг. Построение *R-функций* $z = f(x, y)$ с помощью одной из достаточно полной системы R_α-операций, для которой булева функция $F(X, Y)$ является *сопровождающей*. Для реализации этого шага достаточно в формуле для F заменить $\wedge \to \wedge_\alpha$, $\vee \to \vee_\alpha$ и отрицание интерпретировать как R-отрицание (это их аналитические аналоги) и, для удобства, произвести замену X, Y на x, y соответственно.

IV шаг. Область Ω с границей $\partial\Omega$ задается неравенством вида $\Omega = \{\omega \equiv f(x, y) \geq 0\}$. Неравенство $f(x, y) > 0$ определяет область Ω, а уравнение $f(x, y) = 0$ — границу $\partial\Omega$ области.

Пример 1. Построим уравнение прямоугольной области $ABCD$ с вершинами в точках $A(a, b)$, $B(-a, b)$, $C(-a, -b)$, $D(a, -b)$, отнесенной к системе координат xOy.

I шаг. *Декомпозиция области*. Один из вариантов выбора: в качестве опорных областей возьмем две полосы (вертикальную Ω_1 и горизонтальную Ω_2)

$$\Omega_1 = \{\omega_1 \equiv a^2 - x^2 \geq 0\}$$

$$\text{и } \Omega_2 = \{\omega_2 \equiv b^2 - y^2 \geq 0\}.$$

II шаг. *Композиция области*. Строим логическую формулу для заданной области $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, тогда предикат имеет вид $\Omega_1 \wedge \Omega_2 \equiv (a^2 - x^2) \wedge \wedge (b^2 - y^2)$, принимающий значение 1 внутри прямоугольной области и на границе и 0 — вне этой области.

III шаг. *Строим R-функцию*. Используем R_0-конъюнкцию

$$u \wedge_0 v \equiv \left(u + v - \sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

$$\omega(x, y) \equiv (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) \equiv$$

$$\equiv a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2}$$

IV шаг. Неравенство

$$a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} > 0$$

справедливо для точек внутри прямоугольной области, равенство

$$a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0$$

есть уравнение границы прямоугольной области.

Замечание. Использование R_1-конъюнкции

$$u \wedge_1 v \equiv \tfrac{1}{2}\left(u + v - |u - v|\right)$$

приводит к уравнению границы прямоугольной области вида

$$a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - \left|a^2 - b^2 - x^2 + y^2\right| = 0.$$

Использование элементов системы MathCad для визуализации геометрических свойств R-функций

Структура MathCad-документа для построения уравнения границы произвольной области и ее графика в плоскости xOy состоит из следующих этапов:

1. Задается вербальная (словесная) модель области исследования.
2. Задаются уравнения (неравенства) опорных областей (декомпозиция).
3. Задается R-операция (R-конъюнкция, R-дизъюнкция или R-отрицание).
4. Задается предикатное уравнение для области (композиция).
5. Происходит переход от предикатного уравнения к уравнению на «языке» аналитической геометрии $f(x, y) = 0$, используя необходимую R-операцию (1)–(4). Определяется R-функция $z = f(x, y)$.
6. В плоскости переменных (x, y) задается прямоугольная сетка

$$x_i = a + ih,\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$y_j = c + jh, j = 1, 2, \ldots, N,$$

где N — количество узлов сетки в плоскости xOy.

7. Формируется матрица $z_{i,j}$ значений функции $z = f(x, y)$ в узлах сетки:

$$z_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

8. Строятся линии уровня функции $z = f(x, y)$, определяемые уравнением $f(x, y) = C$, где $C = const$. Граница области в плоскости xOy соответствует значению $C = 0$ (для поставленной задачи — *линия уровня с нулевым значением*).

Пример 1 (*продолжение*)**.** Зададим конкретные значения параметров прямоугольной области $a = 2$ и $b = 3$. Решение этой задачи представлено в приложении в документе MathCad 1.

Пример 2. Построим уравнение контура круговой области с квадратным отверстием. Зададим конкретные параметры: круг радиуса 4 с центром в начале координат, квадрат со стороной 4. Решение задачи представлено в документе MathCad 2.

Пример 3. Построим уравнение контура круговой области радиуса 2 (с центром в начале координат) с полукруговым выступом радиуса 1 (с центром в точке (2, 0)). Решение задачи представлено в документе MathCad 3.

Пример 4. Написать уравнение границы области, заданной неравенствами:

$$f_1 \equiv x + y - 1 \geq 0,\ f_2 \equiv -2x + y + 3 \geq 0,$$
$$f_3 \equiv -y + 3 \geq 0,\ f_4 \equiv x \geq 0,$$

построить линии уровня R-функции, включая график полученного четырехугольника. Решение задачи представлено в документе MathCad 4.

Пример 5. Построить уравнение контура полукруговой области радиуса π с центром в начале координат, ограниченной снизу от начала координат графиком синусоиды. Решение задачи представлено в документе MathCad 5.

Описанный подход целесообразного включения перспективных направлений науки в учебный процесс ставит перед собой цель — достижение максимальной релевантности знаний будущего специалиста. При этом выпускники, владеющие новейшими знаниями, понятиями и навыками их реализации, более конкурентоспособны при трудоустройстве. Формат включения данного подхода в учебный процесс (конечно, при активном участии преподавателя, владеющего этим материалом) может быть отнесен в разделы «Темы рефератов» и «Кейс-задачи» рабочей программы математической дисциплины и ФОСа.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рвачев, В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 551 с.
2. *Выговская, Л.С.* Некоторые вопросы использования инструментов системы MathCad для построения и исследования моделей рыночного равновесия // Научно-методические материалы. М: ВА РВСН имени Петра Великого, 2010. С. 13–28.
3. *Выговская, Л.С.* Система MathCad для решения кейс-задач линейного программирования // Вестник Московской международной высшей школы бизнеса МИРБИС. 2015. № 4. С. 54–57.
4. *Плис, А.И., Сливина Н.А.* MATHCAD: математический практикум. М: Финансы и статистика, 1999. 657 с.

REFERENCES

1. Plis A.I., Slivina N.A. *MATHCAD: matematicheskiy pracktikum.* Moscow, Finansy i statistika, 1999, 657 p. (in Russian)
2. Rvachev V.L. *Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya.* Kiev, Naukova Dumka, 1982, 551 p. (in Russian)
3. Vygovskaya L.S. Sistema MathCad dlya resheniya keys-zadach lineynogo programmirovaniya, *Vestnik Moscovskoy mezhdunarodnoy vyshey shkoly biznesa MIRBIS*, 2015, No. 4, pp. 54–57. (in Russian)
4. Vygovskaya L.S. "Nekotorye voprosy ispolzovaniya instrumentov sistemy MathCad dlya postroeniya i issledovaniya modeley rynochnogo ravnovesiya", in: *Nauchno-metodicheskie materialy*. Moscow, VA RVSN imeni Petra Velikogo, 2010, pp. 13–28. (in Russian)

Выговская Людмила Саввична, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, эконометрики, статистики и информатики, Московская международная высшая школа бизнеса МИРБИС (Институт), lusavy@rambler.ru

Vygovskaya L.S., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Econometrics, Statistics and Informatics, Moscow International Higher School of Business MIRBIS (Institute), lusavy@rambler

---

Документ 1

Параметры прямоугольника $a := 2$, $b := 3$.

Задание опорных областей:

вертикальная полоса шириной $2a$ $f(x, y) := a^2 - x^2$

горизонтальная полоса шириной $2b$ $g(x, y) := b^2 - y^2$

операция R-конъюнкция $\mathrm{RK1}(X,Y) := \left(X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}\right) \cdot \left(X^2 + Y^2\right)$

задание R-функции для прямоугольника $R(X,Y) := \mathrm{RK1}(f(x,y), g(x,y))$

$$\mathrm{RK1}(f(x,y), g(x,y))\,\mathrm{simplify} \to -\left[\sqrt{\left(x^2-4\right)^2+\left(y^2-9\right)^2}+x^2+y^2-13\right]\cdot\left(x^4-8\cdot x^2+y^4-18\cdot y^2+97\right)$$

уравнение границы прямоугольной области

$$-\left[\sqrt{\left(x^2-4\right)^2+\left(y^2-9\right)^2}+x^2+y^2-13\right]\cdot\left(x^4-8\cdot x^2+y^4-18\cdot y^2+97\right)=0$$

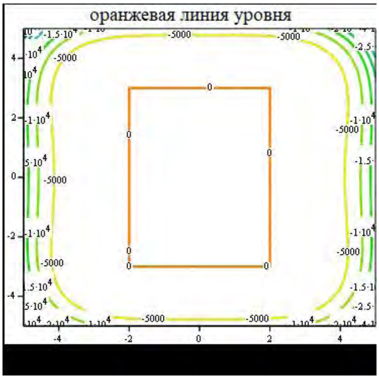
задание на плоскости xOy прямоугольной сетки

$N := 100$; $i := 0 \ldots N$; $j := 0 \ldots N$; $x_i := -4 + \frac{1}{100}\cdot i$; $y_j := -4 + \frac{1}{100}\cdot j$

формирование матрицы значений функции в узлах сетки

$P_{i,j} := R\left(x_i, y_j\right)$.

График границы прямоугольной области совпадает с линией уровня нулевого значения (оранжевого цвета).



В решении задачи для прямоугольной области с другими параметрами достаточно задать новые данные, в частности, для квадратной области $a = 2$ и $b = 2$. Уравнение границы квадратной области будет иметь вид

$$8 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^4 - 8 \cdot x^2 + y^4 - 8 \cdot y^2 + 32} = 0\,.$$

Документ 2
Круговая область с квадратным отверстием

Задание опорных областей:

внутренность круга радиуса 4 составляет $h(x, y) := 16 - x^2 - y^2$

внешность квадрата $2a = 4$, $2b = 4$ составляет

$$k(x,y) := -\left(4-x^2\right)-\left(4-y^2\right)+\sqrt{\left(4-x^2\right)^2+\left(4-y^2\right)^2}$$

задание операции R-конъюнкции $\mathrm{RK}(X,Y) := X + Y - \sqrt{X^2+Y^2}$

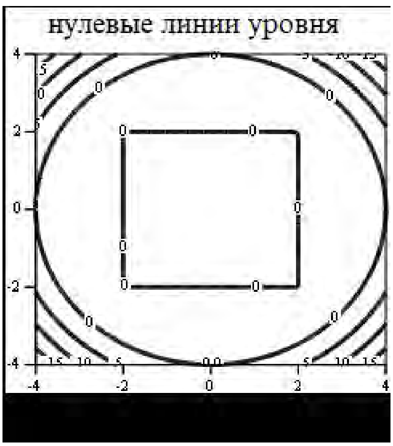
задание R-функции для данной области $\mathrm{R1}(x,y) := \mathrm{RK}\left(h(x,y),k(x,y)\right)$

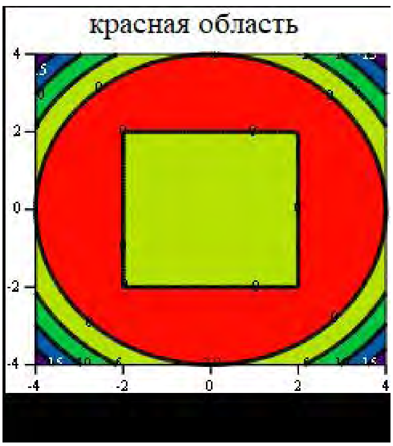
задание сетки и формирование матрицы значений R-функции

$N := 100$; $i := 0 \ldots N$; $j := 0 \ldots N$;

$$x_i := -3 + \tfrac{1}{25} \cdot i\,; \quad y_j := -3 + \tfrac{1}{25} \cdot j\,; \quad K_{i,j} := \mathrm{R1}\left(x_i, y_j\right).$$

Картина линий уровня R-функции





Документ 3
Круговая область с полукруговым выступом справа от начала координат

Задание опорных областей:

внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат

$$S(x, y) := 4 - x^2 - y^2$$

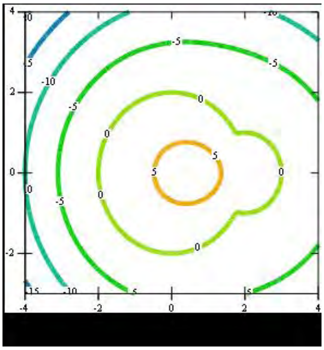
внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (2,0)

$$T(x, y) := 1 - (x - 2)^2 - y^2$$

задание операции R-дизъюнкция $\mathrm{RD}(X, Y) := X + Y + \sqrt{X^2 + Y^2}$

задание R-функции для данной области $\mathrm{R4}(x, y) := \mathrm{RD}(S(x, y), T(x, y))$

$z_{i,j} := R4(x_i, y_j)$ — матрица значений R-функции в узлах прямоугольной сетки.



В решении задачи для круговых областей с другими параметрами достаточно опорные функции определить в виде

$$S(x, y) := S^2 - x^2 - y^2;$$

$$T(x, y) := T^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2,$$

где S, T — радиусы и x_0, y_0 — координаты центра.

Документ 4
Четырехугольная область в плоскости *xOy*, ограниченная графиками прямых

Опорные области: $f1(x, y) := x + y - 1$ $\quad f2(x, y) := -2x + y + 3$

$f3(x, y) := -y + 3$ $\quad f4(x, y) := x$

Предикатное уравнение $f1 \wedge f2 \wedge f3 \wedge f4 = 1$

Задание R-конъюнкции $\mathrm{RKM}(X, Y) := \frac{1}{2} \cdot (X + Y - |X - Y|)$

Задание R-функции $\mathrm{P1}(x, y) := \mathrm{RKM}(f1(x, y), f2(x, y))$

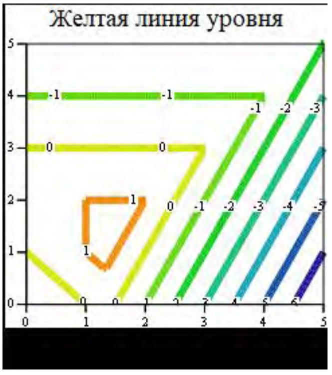
$$\mathrm{P2}(x, y) := \mathrm{RKM}(\mathrm{P1}(x, y), f3(x, y))$$

$$\mathrm{R3}(x, y) := \mathrm{RKM}(\mathrm{P2}(x, y), f4(x, y))$$

Уравнение границы четырехугольной области (слева равенства R-функция области)

$$8 + 3x - |3x - 4| - |4y - x - 4 - |3x - 4|| - |8 - 5x - |3x - 4| - |4y - x - 4 - |3x - 4|| = 0$$

Задание матрицы значений для R-функции $\mathrm{P}_{i,j} := \mathrm{R3}(x_i, y_j)$



Контур четырехугольника отображается на графике желтой линией уровня с нулевым значением.

Документ 5

Полукруговая область, снизу ограниченная графиком синусоиды

Опорные области: внутренность круга радиуса π равна $f_1 \equiv \pi - x^2 - y^2$

область, расположенная выше графика синусоиды $f_2 \equiv y - \sin x$

предикатное уравнение $f_1 \wedge f_2 = 1$

задание операции *R*-конъюнкции $\mathrm{RK}(X,Y) := X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}$

задание *R*-функции для данного чертежа

$$\mathrm{W}(x,y) := y - \sin x + \mathrm{R}^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(y - \sin x)^2 + \left(\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2\right)^2}$$

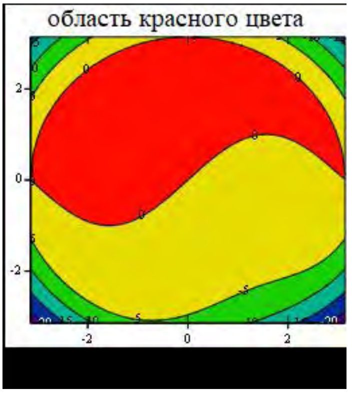
Формирование матрицы значений функции в узлах прямоугольной сетки

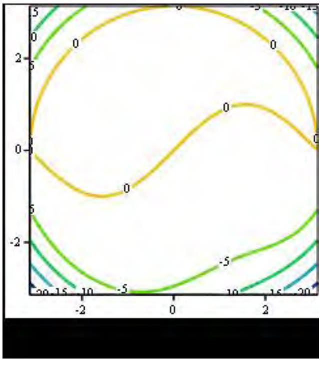
$x_i := \pi + \frac{\pi}{10} i$;

$y_j := \pi + \frac{\pi}{10} j$;

$\mathrm{PW}_{i,j} := W(x_i, y_j)$

Картины линии уровня





В качестве опорных областей можно выбирать весь арсенал элементарных функций. Условие дифференцируемости *R*-функции учитывается при использовании *R*-операции.
