

РЕАЛИЗАЦИЯ ФЕДЕРАЛЬНОЙ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ «МАТЕМАТИКА» В ОБУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Л.И. Боженкова, Е.В. Соколова

Аннотация. В статье описывается один из возможных вариантов методики достижения планируемых предметных и метапредметных результатов на частно-методическом уровне целей обучения математике. Теоретической основой методики является концепция интеллектуального воспитания учащихся. В статье на частно-методическом уровне представлены типовые учебные задачи для обучения математическим понятиям и теоремам. Дана характеристика указанных задач, каждая из которых есть синтез отобранных универсальных учебных действий, адекватных им показателей и моделей заданий. Наполнение моделей конкретным математическим содержанием дает различные учебно-познавательные задачи. При их решении осуществляется постепенное достижение результатов в зонах ближайшего и актуального развития обучающихся. Обоснована необходимость наличия готовности учащихся к решению учебно-познавательных задач и предложены соответствующие упражнения, обеспечивающие эту готовность. Приведены примеры использования учебно-познавательных задач в обучении математике. Их выполнение способствует формированию у школьников умений для достижения предметных и неотделимых от них метапредметных результатов.

Ключевые слова: цели, результаты, умения, математические понятия, доказательство теорем, модели заданий, самостоятельная учебная деятельность.

116

Для цитирования: Боженкова Л.И., Соколова Е.В. Реализация федеральной рабочей программы «Математика» в обучении теоретической информации // Преподаватель XXI век. 2024. № 4. Часть 1. С. 116–132. DOI: 10.31862/2073-9613-2024-4-116-132

IMPLEMENTATION OF THE FEDERAL WORK PROGRAM "MATHEMATICS" IN THE TEACHING OF THEORETICAL INFORMATION

L.I. Bozhenkova, E.V. Sokolova

Abstract. The article describes one of the possible variants of the methodology for achieving the planned subject and meta-subject results at the private-methodological level of mathematics learning objectives. The theoretical basis of the methodology is the

© Боженкова Л.И., Соколова Е.В., 2024



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

concept of intellectual education of students. The article presents typical educational tasks for teaching mathematical concepts and theorems at the methodological level. Characteristics of these tasks are given, each of which is a synthesis of selected universal learning actions indicators adequate to them and task models. Filling the models with specific mathematical content gives various educational and cognitive tasks. When solving them, the gradual achievement of results in the zones of immediate and actual development of students is realized. The necessity of students' readiness to solve educational and cognitive tasks is substantiated and appropriate exercises ensuring this readiness are proposed. Examples of using cognitive tasks in teaching mathematics are given. Their fulfillment contributes to the formation of students' skills to achieve subject and inseparable from them meta-cognitive results.

Keywords: goals, results, skills, mathematical concepts, theorem proving, models of tasks, independent learning activities.

Cite as: Bozhenkova L.I., Sokolova E.V. Implementation of the Federal Work Program "Mathematics" in the Teaching of Theoretical Information. *Prepodavatel XXI vek*. Russian Journal of Education, 2024, No. 4, part 1, pp. 116–132. DOI: 10.31862/2073-9613-2024-4-116-132

Одним из документов, обязательных для использования в общеобразовательных учреждениях с 2023/2024 учебного года, является Федеральная образовательная программа (ФОП), в которой детализированы требования обновленного ФГОС общего образования. ФОП ООО «является основным документом, определяющим содержание общего образования, а также регламентирующим образовательную деятельность организации в единстве урочной и внеурочной деятельности...» [1, п. 16.1]. Наряду с целевыми установками, содержательный раздел основной программы включает федеральные рабочие программы учебных предметов (ФРП).

В соответствии с ФРП учебный предмет «Математика», являясь обязательным, изучается на базовом и углубленном уровнях и включает учебные курсы: «Математика 5–6», «Алгебра 7–9», «Геометрия 7–9», «Вероятность и статистика 7–9». В документе представлены установки, регулирующие процесс обучения математике. Это: 1) приоритетные цели обучения математике в 5–9 классах, цель изучения геометрии (табл. 1 первый столбец); 2) содержание направлений воспитательной деятельности; 3) перечень метапредметных результатов (УУД) — универсальных учебных действий (см. табл. 1 второй столбец); предметные результаты освоения программы по математике (базовый и углубленный уровни — 7–9 классы) для каждого учебного курса [там же]. Перечисленные установки отражают общеметодический уровень целей школьного математического образования. Приоритетные цели реализуются посредством достижения обучающимися предметных, метапредметных и личностных результатов на частнометодическом уровне (учебная тема, урок) [2]. На этом уровне школьники осваивают теоретическую информацию (математические понятия и теоремы), которую затем применяют при решении математических и практико-ориентированных задач. Частнометодический уровень конкретизации целей предполагает отбор планируемых результатов и адекватных умений (показателей), характеризующих их достижение [3; 4].

В связи с вышесказанным процедура целеполагания и целедостижения на частнометодическом уровне становится достаточно проблематичной для действующего

учителя математики. Этот вывод подтверждают результаты анализа наблюдений за ходом учебного процесса во время прохождения студентами педагогической практики и анкетирования учителей математики по линии повышения квалификации. Перечислим наиболее важные вопросы, которые возникают у педагога в процессе планирования обучения теме школьного курса математики или в ходе подготовки к уроку:

- 1. Как сформулировать цели и планируемые метапредметные и личностные результаты в соответствии с ФРП (Математика)?
- 2. Как совместить обучающую деятельность, направленную на достижение предметных результатов, с достижением обучающимися метапредметных результатов?
- 3. Какие УУД выбрать для обучения конкретным единицам учебной информации курса математики 5–9 классов?
- 4. Каким образом конкретизировать УУД или какими умениями, характеризующими достижение планируемых метапредметных результатов, должен владеть ученик?
- 5. Какие задания для формирования таких умений в обучении конкретной учебной информации курса школьной математики нужно использовать?

Ответы на эти вопросы следует искать, в первую очередь, методистам-математикам, т. к. именно они должны предоставить учителю рекомендации к организации целеполагания и достижения планируемых результатов освоения ФРП «Математика». Разработанная нами методика, направленная, в частности, на достижение и оценивание планируемых личностных и метапредметных результатов, неотделимых от предметных, позволяет предложить один из вариантов ответов на приведенный далеко не полный список вопросов [там же; 5]. Теоретической основой методики является концепция интеллектуального воспитания учащихся, базирующаяся, в частности, на системно-деятельностном подходе, на концепции осознанной саморегуляции личности, на методологии математического познания, на исследованиях в области теории школьного математического образования [3]. В контексте данной статьи рассмотрим только системообразующий компонент этой методики — « типовые учебные задачи» (ТУЗ) и соответствующие им учебно-познавательные задачи, использование которых способствует достижению всех видов планируемых результатов.

Таблица 1

Общеметодический уровень целей и метапредметных результатов обучения математике (ФОРМ ОО)

Цели и метапредметные результаты в соответствии с ФРП «Математика» 5–9 классы	
Приоритетные цели обучения математике учащихся [1]	Метапредметные результаты освоения программы по математике (УУД) [там же, пп. 146.3.2, 147.3.2]
1. «Формирование центральных математических понятий (число, величина, геометрическая фигура, переменная, вероятность, функция), обеспечивающих преемственность и перспективность математического образования...»	ПЛ 1 (ПЛ — познавательные логические УУД): «выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между ними, устанавливать основание классификации, обобщения и сравнения»; ПЛ 2: «воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные, отрицательные, единичные, частные, общие, условные»;

Табл. 1. Окончание

Цели и метапредметные результаты в соответствии с ФРП «Математика» 5–9 классы	
Приоритетные цели обучения математике учащихся [1]	Метапредметные результаты освоения программы по математике (УУД) [там же, пп. 146.3.2, 147.3.2]
2. Формирование функциональной математической грамотности (применять математический аппарат для решения практико-ориентированных задач и др.); интерпретировать и оценивать полученные результаты освоения математики. 3. «Подведение обучающихся на доступном для них уровне к осознанию взаимосвязи математики и окружающего мира, понимание математики как части общей культуры человечества». 4. «Развитие интеллектуальных и творческих способностей, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления, интереса к изучению математики». 5. Цель изучения геометрии — «использование ее как инструмента при решении математических и практических задач, встречающихся в реальной жизни»; учащийся должен научиться определять геометрическую фигуру, описывать словами чертеж или рисунок, найти площадь земельного участка и др.; при решении практических задач строить математические модели реальных жизненных ситуаций, проводить вычисления и оценивать полученный результат. Применять знания в математике и в смежных дисциплинах, прежде всего в информатике и физике [там же, пп. 146.6.1.2, 147.5.1.3].	ПЛ 3: «выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий»; ПЛ 4: делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных, индуктивных умозаключений, аналогии; ПЛ 5: «разбирать доказательства математических утверждений, доказывать их самостоятельно, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать рассуждения»; ПЛ 6: «выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать варианты решения, выбирать с учетом самостоятельно выделенных критериев)»; ПРИ 7 (ПРИ — познавательные — работа с информацией): «выявлять недостаточность и избыточность информации, необходимой для решения задачи»; ПРИ 8: «выбирать, анализировать, систематизировать информацию различных видов и форм представления»; ПРИ 9: «выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями»; ПРИ 10: «оценивать надежность информации по критериям, данным учителем, или сформулированным самостоятельно»; К 1 (К — коммуникативные УУД): «воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения при решении задачи»; К 2: «в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, в корректной форме формулировать свои возражения»; Р 1: «самостоятельно составлять план, алгоритм решения задачи (его часть), выбирать способ решения с учетом собственных возможностей, аргументировать, корректировать решение с учетом найденных ошибок, новой информации»; Р 2 (Р — регулятивные УУД): «владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения задачи»; Р 3: «оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения цели, находить ошибку, давать оценку приобретенному опыту».

В педагогической и методической литературе нет единого взгляда на понятия учебной задачи, типовой учебной задачи, учебно-познавательной задачи, поэтому в результате анализа исследований ведущих методистов-математиков Г.И. Саранцева, Л.М. Фридмана, требований ФРП «Математика» и собственного взгляда на содержание указанной категории получены *основные характеристики типовой учебной задачи* и связанной с ней учебно-познавательной задачи [там же; 2–6].

Типовая учебная задача есть синтез планируемых результатов: универсальных учебных действий (УУД); умений, характеризующих достижение этих результатов на двух уровнях трудности (базовом и повышенном); моделей специальных заданий, связанных с основными единицами учебной информации курса математики.

1) Типовая учебная задача является обобщенной, т. к. «наполнение» моделей заданий конкретным математическим содержанием позволяет получить учебно-познавательные задачи для достижения учащимися планируемых результатов освоения определенной единицы учебной информации, в том числе для формирования УУД. Способность к решению учебно-познавательных задач, согласно ФОП ООО, является объектом оценки.

2) Содержание заданий, входящих в учебно-познавательную задачу, обеспечивает обучающимся такую интеллектуальную деятельность в процессе освоения математики, результатом которой являются образовательные продукты, созданные учащимися в соответствии с их познавательными способностями.

3) Учебно-познавательная задача, полученная на основе ТУЗ, является средством управления учебно-познавательной деятельностью учащихся, влияющим на выбор методов и организационных форм обучения математике. Каждая ТУЗ сопровождается соответствующими приемами саморегуляции, что позволяет учителю организовать грамотное с точки зрения использования речевых высказываний руководство деятельностью учащихся, а ученику — решить учебно-познавательную задачу. При этом осуществляется постепенный переход от управления процессом усвоения знаний и умений обучающимися к соуправлению, а затем это управление передается в руки самим учащимся.

4) Умения, входящие в ТУЗ и являющиеся средством решения учебно-познавательной задачи, постепенно усваиваются учащимися, характеризуя достижение планируемых результатов — сформированность УУД.

В рамках данной статьи рассмотрены только типовые учебные задачи и соответствующие им учебно-познавательные задачи, связанные с обучением теории, которые используются на этапе «открытия» новой учебной информации. Их условные названия отражают изучаемую конкретную единицу учебной информации школьного курса математики: ТУЗ № 1 «Математическое понятие», ТУЗ № 2 «Теорема». Конкретизация общеметодического уровня целей обучения математике учащихся 5–9 классов осуществляется в ТУЗ посредством отбора УУД (см. табл. 1) — планируемых результатов и подбора соответствующих умений, объективно необходимых для их достижения с учетом специфики освоения понятий и теорем школьной математики. Планируемые результаты, выраженные в коммуникативных УУД, представлены в ТУЗ в связи с развитием устной и письменной математической и родной речи учащихся, в частности при подготовке сообщений и их презентации [4; 5].

Решение учебно-познавательных задач осуществляется в соответствии с системно-деятельностным подходом, который, обеспечивает активную самостоятельную деятельность обучающихся, поэтому выполнение учащимися каждого из заданий, входящих в учебно-познавательную задачу, организуется учителем в соответствии с различными уровнями самостоятельности, определяемыми зонами ближайшего и актуального развития (по Л.С. Выготскому). Характеризуя зону актуального развития, ученый отмечал, что это «...тот уровень развития психических функций ребенка, который сложился в результате определенных, уже завершившихся циклов его развития», когда ученик

решает задачу без всякой помощи [7, с. 330]. Для зоны ближайшего развития важно, что «...ребенок в состоянии с помощью подражания в коллективной деятельности, под руководством взрослого» осознанно выполнить определенную деятельность [там же, с. 331]. Конкретный уровень самостоятельности, а также тип задания (реконструктивный, вариативный), по П.И. Пидкасистому, определяют выбор форм организации деятельности учащихся и методов обучения, которые учитель осуществляет с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса [8].

Одним из условий организации самостоятельной деятельности учащихся является готовность учащихся к ее выполнению. Под такой готовностью в обучении математике понимается активно-действенное состояние ученика, наличие установки и средств на участие в таком процессе обучения математике, при котором у него формируется умение регулировать собственный процесс усвоения учебной информации на основе использования определенных знаний и умений [3]. Иными словами, обучающему необходимы специальные, освоенные им средства, связанные с содержанием той самостоятельной работы, которая выполняется и будет выполняться в дальнейшем. Эти средства включаются в учебно-познавательные задачи, соответствующие ТУЗ, решение которых позволит все чаще изучать теоретическую информацию в зоне актуального развития, т. е. самостоятельно. Проиллюстрируем рассмотренные теоретические положения на примере указанных типовых учебных задач.

Типовая учебная задача «Математическое понятие» (ТУЗ № 1). Понятие — одна из важнейших форм мышления, которая «есть результат обобщения предметов некоторого класса и мысленного выделения самого этого класса по определенной совокупности общих для предметов этого класса — и в совокупности отличительных для них — признаков» [9, с. 91]. Значение понятийного мышления, являющегося необходимым условием любой умственной деятельности, трудно переоценить. Однако в научных исследованиях отмечается низкий уровень сформированности у школьников понятийных способностей [10]. Методика обучения учащихся математическим понятиям базируется на синтезе психолого-педагогических и логических положений, включающих определенную теорию и умения для освоения понятий [2; 3; 11; 12]. В их содержание входят необходимые обучающимся метазнания, связанные с категорией «понятие»: свойства (общие, несущественные, существенные, признаки), родовое понятие, видовые отличия, определение понятия, классификация и др.

Готовность учащихся к самостоятельному изучению понятий предполагает наличие перечисленных метазнаний, поэтому учитель организует выполнение учащимися подготовительных упражнений А–Г на уроках, предшествующих использованию ТУЗ № 1 [3].

Упражнение А. Рассмотрите данные фигуры (математические объекты). Найдите: а) различные свойства фигур (математических объектов); б) общие несущественные свойства фигур (математических объектов); в) общие существенные свойства фигур (математических объектов) — признаки.

Упражнение Б. Распределите фигуры (математические объекты) на группы. По какому признаку произведено разбиение?

Упражнение В. Используя данные схемы, включающие признаки понятия, установите, определения каких понятий представлены, и назовите термин. Сформулируйте определения указанных понятий. Назовите ближайшее родовое понятие и видовые отличия.

Упражнение Г. Рассмотрите данную классификационную (систематизационную) схему. Объясните, почему это — классификационная (систематизационная) схема. Какое основание для классификации (систематизации) выбрано?

Учитель может использовать ТУЗ № 1 даже если значительная часть учащихся выполняет подготовительные упражнения в зоне ближайшего развития, т. к. формирование тех же умений продолжается при изучении следующих понятий.

Согласно характеристикам типовой учебной задачи, ТУЗ «Математическое понятие» включает отобранные планируемые результаты (из второго столбца, см. табл. 1) и умения, характеризующие их достижение (см. табл. 2, первая и вторая строки). На первых уроках решения соответствующих учебно-познавательных задач выполнение заданий 1, 2 организуется в зоне ближайшего развития с постепенным переходом учащихся на деятельность в зоне актуального развития. При управлении деятельностью учащихся в зоне ближайшего развития учителю необходимы приемы умственных действий для работы с понятиями: сравнение, составление схемы определения понятия, подведение под понятие, контроль усвоения понятия. Эти умственные действия продолжают формироваться у учащихся и используются ими при выполнении заданий в зоне актуального развития, что способствует формированию регулятивных УУД [там же; 5].

Таблица 2

Типовая учебная задача «Математическое понятие»

Планируемые результаты: ПЛ 1, ПЛ 4, ПРИ 7, ПРИ 8, ПРИ 9, К 1, Р 2. (табл. 1, второй столбец)	
Умения , характеризующие достижение планируемых результатов ПЛ 1.1: изображать, распознавать, сравнивать объекты; ПРИ 9.1: составлять схему определения понятия; К 1.1: формулировать определение понятия, используя схему; К 1.2: презентовать сообщение; ПЛ 1.2: систематизировать понятия по данному и самостоятельно выбранному основанию; ПЛ 4.1: устанавливать истинность различных суждений; ПРИ 7.1: понимать смысл суждений, дополнять и формулировать их; ПРИ 8.1: подготовить сообщение; Р 2.1: осуществлять самоконтроль;	
МОДЕЛИ ЗАДАНИЙ	
Обязательный уровень	Повышенный уровень
<u>Задание 1.</u> Прочтите указанный фрагмент текста учебника, содержащий новую информацию о математическом понятии. Составьте схему определения понятия, сформулируйте его определение (по схеме), сверьте с определением, данным в учебнике.	<u>Задание 1.</u> Сравнив данные объекты, выявите группу, обладающую наибольшим числом общих признаков. Составьте схему определения понятия. Сформулируйте определение понятия, используя схему, сверьте его с определением, данным в учебнике.
<u>Задание 2.</u> Выберите из данных объектов те, которые подходят под указанное понятие.	<u>Задание 2*.</u> Для указанного понятия составьте набор объектов для подведения под понятие.
<u>Задание 3</u> (по возможности). Изучите данный текст и заполните пустые блоки в данной систематизационной схеме изученных понятий	<u>Задание 3</u> (по возможности). Изучите данный текст и составьте систематизационную схему понятия, о котором идет речь в тексте
<u>Задание 4.</u> Установите истинность данных утверждений, связанных с определением понятия. Исправьте неверные утверждения различными способами.	
<u>Задание 5.</u> Раскройте термины понятий, связанных с изучаемым понятием.	
<u>Задание 6</u> (по возможности). Изучите историю возникновения «открытого» понятия и подготовьте небольшое сообщение в устной или письменной форме.	

Модели заданий 1, 2 (см. табл. 2) направлены на развитие понятийных категориальных способностей: 1) категориального обобщения — выявление общего существенного признака у данных различных объектов, выражение его на математическом языке и обобщение совокупности всех выделенных признаков в термине понятия — задание 1; 2) понятийной конкретизации — «движение мысли от от общей родовой категории к некоторому множеству видовых примеров» [10, с. 39] — модели заданий 2, 5. Модели заданий 3, 4, 5 (см. табл. 2) способствуют развитию семантических способностей, связанных с пониманием смысла изучаемых понятий, их связи с ранее изученной информацией, с усвоенными знаниями. Заметим, что под раскрытием термина понятия понимается процесс перечисления признаков понятия, входящих в его определение [11]. Это умственное действие используется при доказательстве теорем и позволяет сократить запись их доказательства.

Конкретизация ТУЗ № I дает соответствующую учебно-познавательную задачу, например, «Несовместные события» — понятие, которое рассматривается в теме «Случайные события» курса «Теория вероятностей» [13] (см. табл. 3). Прокомментируем выполнение учащимися заданий 1–5 (см. табл. 3).

Использование этой учебно-познавательной задачи в обучении показало, что в результате выполнения задания 1 учащиеся составили схему определения понятия «Несовместные события» (см. рис. 1).

Таблица 3

Учебно-познавательная задача «Несовместные события» (ТУЗ № 1)

ЗАДАНИЯ	
Обязательный уровень	Повышенный уровень
<u>Задание 1.</u> Прочтите в учебнике [там же, с. 26] определение понятия «несовместные события». Составьте схему определения понятия и сверьте с данной схемой (рис. 1). <u>Задание 2.</u> Выберите из данных предложений те, которые включают понятие «несовместные события». Приведите свои примеры несовместных событий. <u>Задание 3.</u> Изучите п. 51–53 учебника [там же] и заполните пустые блоки в систематизационной схеме «Виды случайных событий».	<u>Задание 1.</u> Сравнив данные предложения (рис. 2), выявите группу, обладающую наибольшим числом общих признаков. Составьте схему определения понятия «несовместные события А, В». Сформулируйте определение понятия, используя схему, сверьте его с определением, данным в учебнике. <u>Задание 2*.</u> Составьте набор предложений для подведения под понятие «несовместные события». <u>Задание 3.</u> Изучив п. 51–53 учебника [там же], составьте систематизационную схему «Виды случайных событий».
<u>Задание 4.</u> Установите истинность следующих утверждений и обоснуйте свои выводы: 1. Два события А и В являются несовместными, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытании. 2. Два события А и В будут несовместными, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. 3. Несовместные события могут происходить одновременно в одном и том же испытании. <u>Задание 5.</u> Раскройте термины понятий «совместные события», «зависимые события», «независимые события». <u>Задание 6.</u> П. Ферма и Б. Паскаль как основатели математической теории вероятностей.	

Умение составлять схему определения понятия позволяет учащимся понять важнейшие теоретические факты: а) наличие в определении понятия ближайшего родового понятия (первый признак) и видовых отличий (остальные признаки); б) осознать связь признаков, входящих в определение понятия, союзом «и»; в) правило работы с признаками: «Если признаки понятия связаны союзом «и», то для того чтобы объект (предмет) относился к данному понятию, необходимо и достаточно, чтобы он обладал всеми признаками, входящими в его определение» [11].

Несовместные события A и B:

- 1) два события **и**
- 2) их пересечение не содержит элементарных событий.

Обозначение: $A \cap B = \emptyset$

Пример. Событие A — «при бросании игральной кости выпало три очка», событие B — «при бросании игральной кости выпало пять очков»

Рис. Схема определения понятия «несовместные события»

Ученики, работавшие на повышенном уровне, выполнив задание 2* (табл. 3, повышенный уровень), составили набор следующих предложений для подведения под понятие «несовместные события».

1. Имеется фонарь с двумя одинаковыми лампами. Событие A: «первая лампа перегорит в течение года», событие B: «вторая лампа перегорит в течение года».

2. Имеется фонарь с двумя одинаковыми лампами. Событие A: «первая лампа перегорит в течение первого года», событие B: «вторая лампа перегорит в течение второго года».

3. В коробке 10 шаров: 3 белых, 4 черных, 3 красных. Из коробки наугад вынимают один шар. Событие A: «шар оказался красным», событие B: «шар оказался черным».

4. Бросают одну игральную кость. Событие A: «выпало четное число очков», событие B: «выпало число очков кратное трем».

5. Вода станет теплее при нагревании.

6. Проводится зачет по геометрии. Событие A: «Иванов получит отметку «5», событие B: «Иванов получит отметку «4»».

Этот набор был использован учителем в качестве задания 2 для учеников, работающих на обязательном уровне (табл. 3). Выполняя анализ предложений, ученики проверяли наличие или отсутствие признаков понятия «несовместные события» в соответствии со схемой определения понятия и делали соответствующие выводы (см. рис.). В результате выполнения задания 3 (табл. 3) учащиеся составили систематизационную схему «Виды случайных событий», включающую совместные и несовместные, зависимые и независимые, противоположные, равновозможные события. Устанавливая истинность утверждений, входящих в задание 4, обучающиеся использовали определение изученного понятия и приводили соответствующие примеры. Процесс и результаты выполнения задания 5 позволили учащимся повторить соответствующие определения понятий на более высоком уровне осознанности. В соответствии с заданием 6 два ученика презентовали подготовленные сообщения, к содержанию которых каждый слушатель по заданию учителя сформулировал и записал два вопроса, что активизировало деятельность обучающихся. Такая деятельность вносит свой вклад в достижение личностных результатов в направлении ценностей научного познания [1].

Таким образом, использование ТУЗ № 1 позволяет не просто сообщить определенное, а обеспечивает усвоение понятий и соответствующих логических приемов, относящихся к метазнаниям, что способствует формированию «у обучающихся математического стиля мышления, проявляющегося в определенных умственных навыках» [там же, п. 146.2.3].

Типовая учебная задача «Теорема» (ТУЗ № 2). Навыки, сформированные у школьников при решении учебно-познавательных задач, основанных на ТУЗ «Математическое понятие», входят в группу умений, с помощью которых доказываются теоремы. Для освоения теорем, важнейших сложных суждений, которые отражают взаимосвязь между понятиями, ученику необходимы новые умения, базирующиеся на логических, психологических и методических основах доказательства. Доказательство в школьном курсе математики — «цепочка дедуктивных умозаключений, ведущих от истинных посылок (условия) к доказываемым тезисам (заключению)» [2, с. 117]. «Объекты математических умозаключений, правила их конструирования раскрывают механизм логических построений, способствуют выработке умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление» [1, п. 147.2.3].

Таблица 4

Структура процесса обучения теоремам

Этапы/ Классы	Название этапа обучения теоремам	Краткое содержание деятельности учащихся на этапах обучения теоремам
I. 7–9 кл.	Работа с формулировкой теоремы	Формулирование теоремы с помощью логического союза «если..., то...»; выделение условия (главного и разъяснительной части) и заключения теоремы.
II.1. 7–9 кл.	Изучение словесного доказательства, данного в учебнике, и составление плана	Выделение логических шагов и устранение логических пробелов: каждый шаг должен включать промежуточное условие, соответствующий вывод, обоснование.
II.2. 7–9 кл.	Поиск доказательства и составление плана	Использование мыслительных действий <i>анализ</i> и <i>синтез</i> : выведение следствий из условия, выведение следствий из заключения, выведение новых следствий из уже полученных следствий (анализ), последовательный анализ то условия, то заключения.
III. 7–9 кл.	Реализация плана	Конструирование доказательств (пошаговая запись) в соответствии с планом.
IV. 7–9 кл.	Изучение доказанной теоремы	Акцентирование идеи доказательства; установление связи теоремы с ранее изученными; построение родословной теоремы; выявление других методов и способов доказательства; построение высказываний, связанных с доказанной теоремой.

Под обучением теоремам в нашем исследовании понимается поэтапная организация освоения теорем учащимися, способствующая развитию их логического мышления и самостоятельности. Этапы такой деятельности и их содержание отобраны в результате анализа различных методических подходов к формированию умений доказывать теоремы и решать математические задачи (см. табл. 4) [2; 3; 12].

Анализ структуры процесса обучения теоремам свидетельствует о его сложности, поэтому школьников необходимо подготовить к самостоятельному выполнению ТУЗ № 2. Такая подготовка осуществляется посредством выполнения учащимися специальных упражнений, адекватных содержанию учебно-познавательной деятельности на этапах обучения теоремам. В психолого-педагогических и методических исследованиях отмечается целесообразность специальной предварительной подготовки к выполнению сложной умственной деятельности, к которой, в частности, относится доказательство теорем [2; 3; 11; 12; 14]. Анализ школьных учебников геометрии свидетельствует об отсутствии заданий, обеспечивающих эту подготовку, поэтому приведем перечень необходимых упражнений [2; 3].

Упражнение 1. Известно, что формулировка теоремы включает условие и заключение. Сравните две формулировки одной и той же теоремы: обоснуйте их достоинства и недостатки. Используя схему, приведите примеры двух формулировок какой-либо теоремы (с использованием логического союза «если, то» и без его использования).

Упражнение 2. Выполните работу с формулировкой теоремы: а) если необходимо, переформулируйте ее с использованием логического союза «Если..., то...»; б) выделите условие (главное условие и разъяснительную часть); в) выделите заключение теоремы; г) запишите «Дано», «Доказать», представив словесные выражения в знаково-символическом виде; д) выполните предварительный чертеж (при необходимости).

Упражнение 3. Изучите данную пошаговую запись доказательства теоремы: а) охарактеризуйте структуру каждого шага в записи доказательства; б) определите взаимосвязь каждого из условий и выводов в данной цепочке шагов доказательства. Что может использоваться в качестве обоснования каждого шага в записи доказательства теоремы? Выявите главную идею доказательства.

Упражнение 4. Заполните пропуски в данной пошаговой записи доказательства теоремы, решении задачи на доказательство, выяснив, какие из компонент пропущены (промежуточное условие и/или промежуточный вывод, и/или обоснование).

Упражнение 5. Выполните работу с текстом доказательства теоремы: а) разбейте текст на смысловые части, пронумеруйте их; б) устраните логические пробелы в каждой части; в) выполните пошаговую запись доказательства теоремы в соответствии с известной структурой: т. к. «промежуточное условие», то «промежуточный вывод» (обоснование). Какое место в этой записи занимает заключение теоремы?

Упражнение 6. Используя образцы, выведите следствия из данных утверждений из полученных новых утверждений. Сформулируйте суждения.

Упражнение 7. Выведите следствия для понятий, связанных отношением ($=$, $\parallel$, $\perp$): «Два отрезка равны, если...», «Два угла равны, если...», «Две прямые параллельны, если...», «Две прямые перпендикулярны, если...». Составьте (дополните) список этих условий для каждой пары понятий — поисковые области пар понятий, связанных отношением.

Упражнение 8. Дополните данную схему поиска доказательства теоремы, составьте план доказательства и выполните его пошаговую запись.

Упражнение 9. Осуществите поиск доказательства теоремы, используя (и/или): а) выведение следствий из условия; б) выведение следствий из заключения; в) неполную схему поиска доказательства; г) составив схему поиска. Составьте план доказательства.

*Упражнение 10**. Откройте теорему, сформулировав гипотезу — текст утверждения на основе: а) составления обратного утверждения для известной теоремы; б) используя аналогию. Осуществите поиск доказательства теоремы.

Упражнение 11. Постройте отрицание для данных простых (сложных) суждений, используя образцы. Приведите свои примеры.

Упражнение 12. Прочтите три данных утверждения, связанных с известной теоремой и сравните их структуру. Что можно сказать об условии (разъяснительной части, главном условии), заключении каждого из этих утверждений по отношению к данной теореме? Объясните, как установить истинность утверждений, используя зависимость между ними.

Представленные упражнения выполняют дидактические функции, соответствующие содержанию УПД учащихся на этапах обучения теоремам. Функции упражнений: 1, 2, 10, 11, 12 — формирование понимания структуры теоремы; роли каждого компонента этой структуры в построении высказываний, связанных с теоремой; 3, 4, 5 — формирование понимания содержания текстов-доказательств, потребности в логических обоснованиях и умений выполнять дедуктивные выводы; 6–9 — становление умения использовать «основной механизм мышления — анализ через синтез» [14, с. 53].

Время и место введения в обучение каждого из указанных упражнений зависит от наличия «подходящей» учебной информации, а также от возможностей обучающихся выполнять УПД с определенной степенью самостоятельности. Так, использование упражнений 1, 2, 3, 4 целесообразно начинать на первых уроках геометрии при рассмотрении свойств смежных и вертикальных углов. Если большинство учащихся выполняют эти упражнения в зоне актуального развития, то вводится упражнение 5. Обучение аналитико-синтетической деятельности (упражнения 6–9) начинается постепенно при решении первых геометрических задач, и далее продолжается при доказательстве теорем. Заметим, что некоторые из приведенных упражнений с определенными ограничениями целесообразно использовать для пропедевтики доказательства теорем уже в 5–6 классах: упражнения 1, 2, 11, 12 — при рассмотрении формулировок признаков делимости; упражнение 6 — при обучении решению текстовых задач арифметическим способом.

Переход к использованию ТУЗ № 2 «Теорема» можно осуществить даже если значительная часть учащихся выполняет подготовительные упражнения в зоне ближайшего развития (с помощью учителя), т. к. формирование соответствующих умений будет продолжаться при обучении новым теоремам (см. табл. 5).

В ТУЗ № 2 входят планируемые результаты (из второго столбца, табл. 1) и адекватные им умения, формированию которых способствовали упражнения 1–12). Заметим, что формулировки заданий значительно сократились благодаря содержанию подготовительных упражнений. Для управления деятельностью учащихся в зоне ближайшего развития учителю необходимы, в частности, приемы умственных действий для работы с теоремами: выведение следствий из условия; выведение следствий из требования; выведение следствий то из условия, то из требования («челнок»); запись доказательства теоремы; построение утверждений, связанных с теоремой; контроль освоения теоремы [3]. Эти умственные действия продолжают формироваться у учащихся и используются ими при выполнении заданий в зоне актуального развития.

Таблица 5

Типовая учебная задача «Теорема»

Планируемые результаты: ПЛ 2–ПЛ 5, ПРИ 7, ПРИ 9, К 1, Р 2 (табл. 1, второй столбец):	
Используемые умения для достижения планируемых результатов: ПРИ 7.1; ПЛ 5.1; К 1.1; Р 2.1: анализировать данные тексты, связанные с теоремой; ПЛ 3.1; ПРИ 9.1; Р 2.2: выполнять аналитико-синтетическую деятельность при поиске доказательства; ПЛ 4.1: составлять план доказательства; ПРИ 9.2, ПЛ 4.2; К 1.2; Р 2.3: конкретизировать план в цепочке логически расположенных предложений; ПЛ 2.1, 5.2, 6.1; ПРИ 9.3; К 1.3, Р 2.4: дополнять, строить высказывания, устанавливать их истинность	
МОДЕЛИ ЗАДАНИЙ	
<i>Обязательный уровень</i>	<i>Повышенный уровень</i>
<u>Задание 1.</u> а) выполните работу с формулировкой теоремы; б) выполните работу с текстом доказательства теоремы; в) осуществите самоконтроль по образцу. <u>Задание 2.</u> Сформулируйте обратное утверждение для доказанной теоремы установите его истинность.	<u>Задание 1.</u> а) выполните работу с формулировкой теоремы; б) осуществите поиск доказательства утверждения; в) осуществите самоконтроль по образцу. <u>Задание 2.</u> Сформулируйте для доказанной теоремы противоположное, обратное противоположному утверждения, установите их истинность.
<u>Задание 3.</u> Установите истинность данных утверждений. Исправьте неверные утверждения различными способами. <u>Задание 4</u> (по возможности). Изучите историю возникновения изученной теоремы и/или найдите другие методы и способы ее доказательства. Подготовьте небольшое сообщение в устной или письменной форме. <u>Задание 5*.</u> Составьте родословную теоремы.	

На основе ТУЗ № 2 учитель конструирует учебно-познавательные задачи для конкретной теоремы, например, для теоремы о свойстве диаметра, перпендикулярного хорде (см. табл. 6).

Таблица 6

Учебно-познавательная задача «Теорема о свойстве диаметра, перпендикулярного хорде» (ТУЗ № 2)

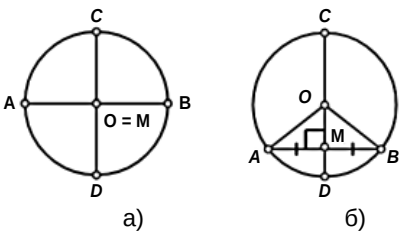
ЗАДАНИЯ	
<i>Обязательный уровень</i>	<i>Повышенный уровень</i>
<u>Задание 1.</u> Прочтите в учебнике формулировку теоремы «Свойство диаметра, перпендикулярного хорде» [15]. а) Выполните работу с формулировкой теоремы;	
б) выполните работу с текстом доказательства теоремы; в) осуществите самоконтроль по образцу (см. табл. 7). <u>Задание 2.</u> Сформулируйте обратное утверждение и установите его истинность, используя учебник. Сформулируйте «новое» условие равенства двух отрезков.	б) осуществите поиск доказательства утверждения; в) осуществите самоконтроль по образцу (см. табл. 7). <u>Задание 2.</u> Сформулируйте противоположное, обратное противоположному утверждения, установите их истинность, используя взаимосвязь между утверждениями. Сформулируйте «новое» условие перпендикулярности двух отрезков
<u>Задание 3.</u> Из данных утверждений выберите верные (неверные). Исправьте неверные утверждения различными способами: а) если хорда окружности перпендикулярна диаметру, то она делится им пополам. б) хорда окружности, перпендикулярная другой хорде, делит ее пополам. в) диаметр окружности, делящий другой диаметр пополам, перпендикулярен ему.	

Работа с этой учебно-познавательной задачей была организована в группах: две группы учащихся работали на повышенном уровне (группы № 1, № 2), три группы — на обязательном. Все группы, кроме первой (около 20% учащихся), выполнили задание 1 в зоне ближайшего развития с использованием дозированной помощи учителя. В качестве подсказок использовалась неполная схема поиска доказательства (группа № 2) и неполная пошаговая запись доказательства теоремы (остальные группы).

В результате выполнения задания 1 ученики записали: а) условие, выделив разъяснительную часть пунктирным прямоугольником и подчеркнув главное условие: $CD \perp AB$; б) заключение теоремы; в) доказательство в виде цепочки логически расположенных предложений (см. табл. 7). Задание 2 выполнили в зоне актуального развития учащиеся всех групп (около 78%), кроме одной. Такой высокий процент выполнения объясняется фактом выделения в условии теоремы разъяснительной части, которая не меняется при формулировании всех видов утверждений, связанных с теоремой, и с взаимопомощью в группе. Задание 3 учащиеся выполнили индивидуально с последующей взаимопроверкой и проверкой по образцу, результаты которой показали, что 73% учащихся выполнили задание верно.

Таблица 7

**Результат выполнения учебно-познавательной задачи «Теорема»
(задание 1)**

Дано: окружность $O(r)$: AB – хорда CD – диаметр $CD \cap AB = M$ $CD \perp AB$ Доказать: $AM = MB$	 а) б) Рис. 2. Иллюстрация к теореме	
Доказательство		
Случай I: $AB \equiv CD$ (рис. 2а): т.к. AB, CD — диаметры $O(r)$, то $AB = CD$, $CD \cap AB = O$ ($O \equiv M$) и $AM = MB = r$ (определение окружности).		
Случай II: $AB \neq CD$ (рис. 2б)		
Условие (промежуточное условие)	Промежуточный вывод (вывод)	Обоснование
1. Т. к. O — центр окружности $O(r)$, $A \in O(r)$, $B \in O(r)$, то	$OA = OB = r$	определение окружности
2. Т. к. в $\triangle AOB$: $OA = OB$, то	$\triangle AOB$ — равнобедренный	определение равнобедренного треугольника
3. Т. к. $CD \perp AB$, $OM \subset CD$, O — вершина $\triangle AOB$, $M \in AB$, то	$OM \perp AB$ и OM — высота $\triangle AOB$	определение высоты треугольника
4. Т. к. OM — высота $\triangle AOB$ и $OA = OB$, то	OM — медиана $\triangle AOB$	теорема: свойство равнобедренного треугольника
5. Т. к. OM — медиана $\triangle AOB$, то	$AM = MB$ (ч. т. д.)	определение медианы треугольника

Таким образом, выполнение обучающимися типовых учебных задач, направленных на освоение теории школьного курса математики (понятий и теорем), способствует тому, что «под руководством педагога постепенно у ученика формируется действительное мышление, способное усваивать, узнавать, понимать и открывать нечто новое» (субъективно новое) [14, с. 55]. В этом случае действительно можно утверждать, как указано в ФРП (Математика), что «обучающиеся осваивают такие приемы и методы мышления, как индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия» [1]. С помощью полученных умений ученики учатся управлять собственной деятельностью, что является важным фактором не только их интеллектуального становления, но и личностного развития.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 16.11.2022 № 993 «Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования». URL: https://edsoo.ru/Federalnaya_obrazovatel'naya_programma_osnovnogo_obschego_obrazovaniya.htm (дата обращения: 28.04.2024).
2. *Саранцев, Г.И.* Методика обучения математике: методология и теория. Казань: Центр инновационных технологий, 2012. 292 с.
3. *Боженкова, Л.И.* Интеллектуальное воспитание учащихся в обучении геометрии: монография. Калуга: КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007. 281 с.
4. *Соколова, Е.В.* Критериальное внутреннее оценивание учебных достижений учащихся 7–9 классов в обучении геометрии: дис. ... канд. пед. наук. М.: МПГУ, 2017.
5. *Боженкова, Л.И., Соколова, Е.В.* Типовые учебные задачи — необходимое средство качества обучения математике // Осовские педагогические чтения. Образование в современном мире: новое время — новые решения. Сборник материалов XVI Международной научно-практической конференции. Саранск: МГПУ, 2022. С. 121–131.
6. *Фридман, Л.М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 2005. 208 с.
7. *Выготский, Л.С.* Педагогическая психология / под ред. В.В. Давыдова. М.: Педагогика-пресс, 1996. 536 с.
8. *Пидкасистый, П.И.* Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. М.: Педагогическое общество России, 2005. 236 с.
9. *Войшвилло, Е.К.* Понятие как форма мышления: логико-гносеологический анализ. М.: Либроком, 2009. 240 с.
10. *Холодная, М.А., Сиповская, Я.И.* Понятийные способности: теория, диагностика, эмпирика. М.: Институт психологии РАН, 2023. 172 с.
11. *Талызина, Н.Ф.* Педагогическая психология: учебное пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. М.: Академия, 2013. 288 с.
12. *Оганесян, В.А.* Методика преподавания математики в средней школе: общая методика. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов / В.А. Оганесян, Ю.М. Калягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. М.: Просвещение, 1980. 368 с.
13. *Высоцкий, И.Р., Яценко, И.В.* Математика. Вероятность и статистика. 7–9 классы. Базовый уровень: учебник / под ред. И.В. Яценко. М.: Просвещение, 2023. 110 с.

14. Брушлинский, А.В. Субъект: мышление, учение, воображение. М.: МПСИ, 2009. 392 с.
15. Атанасян, Л.С., Бутузов, В.Ф., Кадомцев, С.Б. Математика. Геометрия: 7–9-ые классы. Базовый уровень: учебник. М.: Просвещение, 2023. 416 с.

REFERENCES

1. *Prikaz Ministerstva prosveshcheniya Rossijskoj Federacii ot 16.11.2022 № 993 “Ob utverzhdenii federalnoj obrazovatelnoj programmy osnovnogo obshchego obrazovaniya”* [Order of the Ministry of Education of the Russian Federation Dated 11/16/2022 No. 993 “On Approval of the Federal Educational Program of Basic General Education”]. Available at: https://edsoo.ru/Federalnaya_obrazovatel_naya_programma_osnovnogo_obshchego_obrazovaniya.htm (accessed: 28.04.2024). (in Russ.)
2. Sarancev, G.I. *Metodika obucheniya matematike: metodologiya i teoriya* [Methods of Teaching Mathematics: Methodology and Theory]. Kazan, Centr innovacionnyh tekhnologij, 2012, 292 p. (in Russ.)
3. Bozhenkova, L.I. *Intellectualnoe vospitanie uchashchihsya v obuchenii geometrii* [Intellectual Education of Students in Teaching Geometry: A Monograph]. Kaluga, Kaluzhskij gosudarstvennyj universitet im. K.E. Ciolkovskogo, 2007, 281 p. (in Russ.)
4. Sokolova, E.V. *Kriterialnoe vnutrennee ocenivanie uchebnyh dostizhenij uchashchihsya 7–9 klassov v obuchenii geometrii* [Criterion-Based Internal Assessment of Educational Achievements of Students in Grades 7–9 in Teaching Geometry]: PhD Dissertation (Pedagogy). Moscow, Moskovskij pedagogicheskij gosudarstvennyj universitet, 2017. (in Russ.)
5. Bozhenkova, L.I., Sokolova, E.V. Tipovye uchebnye zadachi — neobhodimoe sredstvo kachestva obucheniya matematike [Typical Educational Tasks Are a Necessary Means of Teaching Mathematics Quality]. In: *Osovskie pedagogicheskie chteniya. Obrazovanie v sovremennom mire: novoe vremya — novye resheniya* [Osovsky Pedagogical Readings. Education in the Modern World: New Time — New Solutions. Collection of Materials of the XVI International Scientific and Practical Conference]. Saransk, Mordovskij gosudarstvennyj pedagogicheskij universitet, 2022, pp. 121–131. (in Russ.)
6. Fridman, L.M. *Logiko-psihologicheskij analiz shkolnyh uchebnyh zadach* [Logical and Psychological Analysis of School Educational Tasks]. Moscow, Pedagogika, 2005, 208 p. (in Russ.)
7. Vygotskij, L.S. *Pedagogicheskaya psihologiya* [Pedagogical Psychology], ed. by V.V. Davydov. Moscow, Pedagogika-press, 1996, 536 p. (in Russ.)
8. Pidkastyj, P.I. *Samostoyatel'naya poznavatel'naya deyatel'nost shkolnikov v obuchenii* [Independent Cognitive Activity of Schoolchildren in Education]. Moscow, Pedagogicheskoe obshchestvo Rossii, 2005, 236 p. (in Russ.)
9. Vojshvillo, E.K. *Ponyatie kak forma myshleniya: logiko-gnoseologicheskij analiz* [The Concept as a Form of Thinking: Logical and Epistemological Analysis]. Moscow, Librokom, 2009, 240 p. (in Russ.)
10. Holodnaya, M.A., Sipovskaya, Ya.I. *Ponyatijnye sposobnosti: teoriya, diagnostika, empirika* [Conceptual Abilities: Theory, Diagnostics, Empirics]. Moscow, Institut psihologii Rossijskoj akademii nauk, 2023, 172 p. (in Russ.)
11. Talyzina, N.F. *Pedagogicheskaya psihologiya* [Pedagogical Psychology: A Textbook]. Moscow, Akademiya, 2013, 288 p. (in Russ.)

12. Oganessian, V.A., Kalyagin, Yu.M., Lukankin, G.L., Sanninskij, V.Ya. *Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole: obshchaya metodika* [Methods of Teaching Mathematics in Secondary Schools: General Methodology. Textbook for Physics and Mathematics Faculties of Pedagogical Institutes]. Moscow, Prosveshchenie, 1980, 368 p. (in Russ.)
13. Vysockij, I.R., Yashchenko, I.V. *Matematika. Veroyatnost i statistika. 7–9 klassy. Bazovyy uroven* [Mathematics. Probability and Statistics. Grades 7–9. Basic Level: Textbook], ed. by I.V. Yashchenko. Moscow, Prosveshchenie, 2023, 110 p. (in Russ.)
14. Brushlinskij, A.V. *Subekt: myshlenie, uchenie, voobrazhenie* [Subject: Thinking, Teaching, Imagination]. Moscow, Moskovskij psihologo-socialnyj institut, 2009, 392 p. (in Russ.)
15. Atanasyan, L.S., Butuzov, V.F., Kadomtsev, S.B. *Matematika. Geometriya: 7–9-ye klassy. Bazovyy uroven* [Mathematics. Geometry: Grades 7–9. Basic Level: Textbook]. Moscow, Prosveshchenie, 2023, 416 p. (in Russ.)

Боженкова Людмила Ивановна, доктор педагогических наук, профессор, главный научный сотрудник научного бюро, Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева, krasel1@yandex.ru

Luydmila I. Bozhenkova, ScD in Pedagogy, Professor, Chief Researcher of the Scientific Bureau, M.E. Evseviev Mordovian State Pedagogical University, krasel1@yandex.ru

Соколова Елизавета Валериевна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра теории и методики обучения математике и информатике, Московский педагогический государственный университет, ev.sokolova@mpgu.su

Elizaveta V. Sokolova, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University, ev.sokolova@mpgu.su