**УДК 373.5**
**ББК 74.2**

DOI: 10.31862/2073-9613-2022-3-122-128

# МЕТОД ЗАБЛУЖДЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

В.А. Матвеева, Н.А. Самсикова

**Аннотация.** *Навыки критического анализа, аргументации в рассуждениях являются определенными показателями качества взаимодействия современного человека в информационном пространстве. Строгость, лаконичность, доказательность в суждениях указывают на определенную культуру мышления. В статье мы рассмотрели основные принципы так называемого математического стиля мышления, основанного на логической строгости, полноте, лаконичности, аргументированности в рассуждениях. С целью формирования у школьников определенной культуры мышления мы разработали метод заблуждений, главная идея которого заключается в анализе и полноценной аргументации ошибок в ходе дискуссии на уроках математики. Оперируя фактами и выстраивая логическую цепочку умозаключений, ученик становится убедительным и не сталкивается с критикой. В статье рассмотрены основные «шаги» метода заблуждений: шаг необходимости аргументации, ложных выводов при умозаключениях, шаг рефлексии. В основе метода заблуждений лежат следующие принципы: систематичность, целостность и последовательность, проблемность, рефлексия. В процессе применения метода заблуждений школьники усваивают основные принципы аргументации в математике и выявляют ряд ошибок в рассуждениях: применение неполной индукции и аналогии в «доказательстве» утверждений, ошибки в дедуктивных умозаключениях, неполная дизъюнкция при доказательстве утверждений. Заметим также, что определяющим фактором в эффективности метода заблуждений является высокая квалификация учителя. Проблемные ситуации в рамках метода должны быть продуманы и тщательно спланированы. Отсутствие контроля со стороны учителя в процессе дискуссии на уроках математики, допущение им логических ошибок может приводить к формированию ложных убеждений у школьников.*



**Ключевые слова:** *метод заблуждений, шаги метода заблуждений, принципы метода заблуждений, софизм, ложный вывод.*

**Для цитирования:** *Матвеева В.А., Самсикова Н.А.* Метод заблуждений в обучении математике // Преподаватель XXI век. 2022. № 3. Часть 1. С. 122–128. DOI: 10.31862/2073-9613-2022-3-122-128

# THE METHOD OF DELUSIONS IN TEACHING MATHEMATICS

V.A. Matveeva, N.A. Samsikova

**Abstract.** *The skills of critical analysis and argumentation in reasoning are certain indicators of the quality of interaction in the information space. Rigor, conciseness, and argumentativeness in reasoning indicate a certain culture of thinking. The article* *considered the basic principles of the so-called mathematical style of thinking, based on logical rigor, completeness, brevity, argumentativeness in reasoning. In order to form a certain culture of thinking in students a method of delusion, the main idea of which is to analyze and fully argue errors in the course of the discussion in Mathematics classes has been developed. Operating with facts and building a logical chain of inferences, the student becomes persuasive and does not face criticism. The article deals with the main "steps" of the fallacy method which comprise the step of the necessity of reasoning, the false deductions step of inference, and the step of reflection. The method of fallacies is based on the following principles: systematicity, integrity and consistency, problematics, reflection. During the application of the method of fallacies pupils learn the basic principles of argumentation in mathematics and identify a number of errors in reasoning: the use of incomplete induction and analogy in the "proof" of statements, errors in deductive inferences, incomplete disjunction in the proof of statements. It should also be noted that a determining factor in the effectiveness of the method of fallacies is the high qualification of the teacher. Problem situations in the method should be thought through and carefully planned. Lack of control on the part of the teacher in the process of discussion in mathematics lessons, making logical errors can lead to the formation of false beliefs in students.*

**Keywords:** *the method of delusions, the steps of the method of delusions, the principles of the method of delusions, sophism, false conclusion.*

**Cite as:** Matveeva V.A., Samsikova N.A. The Method of Delusions in Teaching Mathematics. *Prepodavatel XXI vek.* Russian Journal of Education, 2022, No. 3, part 1, pp. 122–128. DOI: 10.31862/2073-9613-2022-3-122-128

Формирование культуры мышления становится сегодня актуальной проблемой, поскольку информационное пространство, в котором взаимодействует современный человек, в том числе школьник, содержит огромное количество недостоверных данных. Современное открытое информационное пространство является величайшим достижением человечества, и наша задача — научить новое поколение использовать эти блага, формируя багаж из достоверных знаний. Современным студентам часто приходится объяснять, что на нуль делить нельзя, что Земля круглая, и, аргументируя противоположные высказывания, авторы различных контентов в сети Интернет допускают логические ошибки. Формирование критического, диалектического мышления становится неотъемлемой частью современного образования, призванного научить современного школьника давать аргументированную оценку различной информации, формировать его культуру мышления.

Достоинствами математики как науки, бесспорно, является строгость, полнота, четкость, лаконичность и аргументированность рассуждений; математический формализм является универсальным механизмом для достижения абсолютного и достоверного знания. Однако все эти достоинства зачастую являются препятствиями для школьников, начинающих знакомство с этой наукой. Математика — абстрактная наука, рассматривающая идеальные модели и оперирующая формальными исчислениями, поскольку отстраненность знаково-символических действий от реальных объектов является идеальным условием для получения абсолютного знания. Не стоит забывать, что математический формализм (по Д. Гильберту) рассматривается как источник истинной математической науки, но нисколько на затрагивает область обучения математике. Чрезмерно раннее погружение школьника в математический формализм становится камнем преткновения и непонимания.

Специфика научной области вносит свои определенные трудности в обучение математике, но нельзя при этом отрицать развивающие, воспитательные эффекты этой дисциплины. Блестящий советский математик и педагог А.Я. Хинчин ещт в середине прошлого столетия говорил о воспитательном эффекте при обучении математике, роли учителя в этом процессе и трансформации науки для достижения педагогических целей [1].

Громкие высказывания о том, что математика ум в порядок приводит (М.В. Ломоносов), что математические модели описывают объекты окружающей нас действительности, становятся для учителя вызовом, поскольку все это нужно показать своим ученикам. Разучивание определенных алгоритмов и бесконечные повторения базовых ключевых задач не способны показать школьнику красоту математики, которая и заключается в ее разнообразии. Полнота и обоснованность рассуждений, навыки критического анализа, рефлексия являются основными показателями «стиля математической мысли» [там же]. Сила математики не в количестве формул, а в качестве рассуждений.

Цель статьи — раскрыть содержание метода заблуждений и обосновать необходимость использования этого метода в обучении математике.

## Материал и методы исследования

Развитие современного информационного пространства неизбежно ведет человечество к необходимости непрерывного обучения. На сегодняшний день формирование человеческого капитала происходит в условиях стремительных изменений в системе информационных взаимодействий и регулярных обновлений трудовых функций специалистов. «Умение учиться» становится базовой идеей современного образования, а процесс обучения неизбежно связан с допущением ошибок. С целью преодоления трудностей, связанных с формально-логическими, абстрактными моделями, чрезмерной алгоритмизацией при обучении математике, мы предлагаем использовать в обучении *метод заблуждений* [2].

Главная мысль *метода заблуждений* заключается в том, что при изучении курса математики школьники должны допускать ошибки, за которые их не будут «наказывать» неудовлетворительными отметками. Страх перед допущением ошибки зачастую останавливает обучающегося. Также в основу *метода заблуждений* легли «правила» математического мышления: логическая строгость, полнота, лаконичность, аргументированность в рассуждениях.

## Результаты исследования

Рассмотрим основные «шаги» *метода заблуждений.*

1. Шаг необходимости аргументации.

В процессе обучения математике очень важно не просто следовать алгоритму, хотя в определенных случаях это, бесспорно, является необходимым условием обучения, но также сталкиваться с явными ошибками.

В качестве примера рассмотрим задание.

Ученик решает уравнение

$$3x - 15 = x - 5$$

следующим образом:

$$3x - 15 = x - 5$$
$$3(x - 5) = x - 5$$
$$3 = 1$$

В ответе записывает, что уравнение не имеет решений. Прав ли ученик? Аргументируйте свой ответ.

Такого рода задания вызывают у обучающихся, как правило, однозначный ответ, но при аргументации возникают различные точки зрения. И объяснения, что при решении подобных линейных уравнений нужно выполнить преобразование с переносом неизвестных и известных слагаемых, является неубедительным. А вот обучающиеся, которые свое объяснение строят на области допустимых значений, не сталкиваются с критикой.

Таким образом, аргументация чужих явных ошибок обеспечивает воспитательный эффект как, например, приобретение навыка необходимости построения цепочки строгих, обоснованных умозаключений.

2. Шаг ложных выводов при умозаключениях.

После разбора чужих ошибок приходит время допускать свои собственные. Данный шаг *метода заблуждений* не должен выйти из-под контроля учителя. Очень важно, чтобы конкретной задачей мы обращали внимание на одну ошибку (применение неполной индукции и аналогии для «доказательства» утверждения, ошибки в дедуктивных умозаключениях, неполная дизъюнкция при доказательстве утверждений).

В качестве примера рассмотрим задание.

Даны верные утверждения 284⋮4, 140⋮4, 992⋮4. Можно ли утверждать, что любое число, оканчивающееся чётной цифрой, кратно 4?

В процессе решения таких заданий ученики могут допускать ошибки, которые в процессе рассуждений должны быть выявлены и выяснена причина их возникновения.

Приведем пример ошибочного вывода, полученного в результате применения аналогии. После изучения признаков делимости на 3 и на 9 ученики по аналогии предлагают признак делимости на 27. Для обоснования ошибочности их рассуждений можно привести контрпример. Например, 272745 не делится на 27, но 2 + 7 + 2 + 7 + 4 + 5 = 27, 27 делится на 27.

Неправильно подобранная последовательность частных посылок тоже приводит учеников к ошибочному выводу. Так, например, для «открытия» индуктивным путем правила умножения десятичных дробей был рассмотрен только один пример, в котором во множимом и множителе было три десятичных знака.

Ученик сделал вывод: «Чтобы умножить десятичные дроби, мы умножим их, не обращая внимания на запятые, а в произведении отделяем справа три десятичных знака».

Учителю необходимо разъяснять базовые принципы доказательства в математике и объяснять школьникам, почему неполная индукция не может являться одним из методов доказательства.

Рассмотрим пример ошибки в решении геометрической задачи. У школьника в ходе рассуждений получилось, что хорда, не проходящая через центр окружности, равна диаметру.

Приведем решение ученика.

Проведем в окружности диаметр AB и возьмем на окружности произвольную



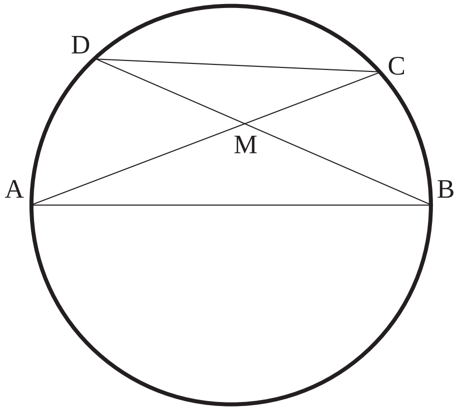


*Рис.* В окружности хорды AC и BD пересекаются в точке M точку C, отличную от точек A и B (см. рис.). Соединим C с A. Обозначим середину AC через M и проведем через нее и точку B прямую до пересечения с окружностью в точке D. Соединим D с C. Рассмотрим треугольники ABM и CDM. У них AM = CM по построению, ∠ABM = ∠DCM как вписанные опирающиеся на одну и ту же дугу AD, ∠AMB = ∠CMD как вертикальные. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. А в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, следовательно, AB = CD [3].

В ходе обоснования утверждений ученики могут допустить различные ошибки, связанные с процедурой доказательства, которая требует соблюдения определенных правил, соответствующих доказательному рассуждению: 1) в ходе доказательства теоремы тезис не должен заменяться на другие утверждения; 2) не допускать обоснование тезиса с помощью ложных аргументов; 3) тезис должен вытекать из аргументов по общим правилам умозаключений. Если эти правила нарушаются, то в доказательстве возникают логические ошибки [4].

3. Шаг рефлексии.

В процессе обучения очень важно анализировать приобретенные знания, умения, опыт деятельности. В *методе заблуждений* шаг рефлексии имеет особое значение. Выяснив на этапе ложных выводов при умозаключениях одну из математических ошибок, необходимо «включить» её для рассмотрения на следующем этапе, который можно запланировать через несколько занятий.

В качестве примера рассмотрим задание.

Справедливо ли утверждение: четное натуральное число $n$ в пределах $4 < n < 20$ можно представить в виде двух простых чисел.

Усвоив ошибку на втором шаге метода заблуждений ученик понимает разницу между полной и неполной индукцией и решение данного задания путем перебора всех возможных вариантов становится очевидным и непротиворечивым.

Можно предлагать задачи на связь математического содержания школьного курса математики с метапредметным содержанием. Так, например, можно показать связь математики с географией. Предложить ученикам найти ошибку в рассуждениях школьника. На уроке географии школьник рассказывал про Латинскую Америку. На вопрос учителя: «Какие государства в Латинской Америке являются республиками?» Ответил следующее: «Аргентина является республикой; Бразилия — республика; Венесуэла — республика; Эквадор — республика. Аргентина, Бразилия, Венесуэла, Эквадор — латиноамериканские государства. Следовательно, все латиноамериканские государства являются республиками». Верно ли это? И в чем ошибка?

Рассмотрим основные принципы *метода заблуждений.*

1) Систематичность.

Применение *метода заблуждений* не должно быть фрагментарным и отдаленным во времени. Данный метод возможно систематически применять при изучении каждой темы, начиная с 7 класса. Хотя возможности применять *метод заблуждений* появляются еще в начальной школе и в 5–6-х классах основной школы, так как в начальной школе усваиваются следующие логические приемы: прием выделения существенных свойств, сравнение и др., а в 5–6-х классах начинается систематическое знакомство с элементами логики.

2) Целостность и последовательность.

Условием выполнения данного принципа является выполнение всех шагов метода заблуждений. Выявление ошибки и некачественная проработка всех ее тонкостей и нюансов является непростительной ошибкой учителя. Несоблюдение принципа целостности и последовательности может приводить к формированию ложных убеждений у школьников.

3) Проблемность.

*Метод заблуждений* является одним из активных методов обучения математике, основанный на дискуссии, поисковой деятельности учащихся.

4) Целеполагание.

Подбор заданий на каждом шаге *метода заблуждений* должен отвечать принципу целеполагания. Учитель формулирует задания в соответствии с целями и задачами урока, достижение которых обеспечивается комплексной работой над определенной ошибкой.

Таким образом, становится совершенно очевидно, что применение *метода заблуждений* лишь в одном месте курса не произведет должного эффекта. Более того, непоследовательность в шагах, несоблюдение принципов метода могут существенно навредить школьнику, сформировав систему ложных убеждений. Например, для того, чтобы доказать неравенство, определенное на множестве действительных чисел, достаточно подставить несколько значений вместо переменной и убедиться в истинности полученных высказываний. Это недопустимые ошибки! Сегодня все чаще приходится сталкиваться с подобными убеждениями школьников.

Применение *метода заблуждений* не требует рассмотрения дополнительного теоретического материала школьниками. Проблемные ситуации в рамках метода должны быть продуманы, организованы учителем в процессе изучения темы дисциплины, в чем и заключается сложность применения метода заблуждений. Учитель становится ответственен за применение метода, и исход обучения зависит от уровня его компетентности. Считаем, что данный метод нуждается в разработке методической поддержки для учителей.

Таким образом, метод заблуждений обеспечивает согласованность внутри дисциплины, вскрывает генезис основополагающих явлений математики как науки и показывает школьнику другую сторону математики. Знаково-символическая деятельность, бесспорно, важна, и формализм неизбежен в современной математике, но не стоит забывать о её базовых принципах: точности обозначений; четкости, полноте, лаконичности и непротиворечивости аргументации. В этом заключается ценность и красота математики, которую можно показать школьнику в ходе математических дискуссий с применением *метода заблуждений*.



## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Хинчин, А.Я.* Педагогические статьи: вопросы преподавания математики, борьба с методическими штампами. Изд. 3. М.: URSS, 2013. 208 с.
2. *Матвеева, В.А., Воронюк, Ю.Д.* Моделирование как смыслообразующий феномен при решении задач по математике // Ребенок в современном образовательном пространстве мегаполиса: материалы VIII Международной научно-практической конференции. М.: Московский городской педагогический университет, 2021. С. 205–209.
3. *Самсикова, Н.А., Стефанова, Н.Л.* Роль ситуационных задач в методической подготовке будущих учителей математики // Казанский педагогический журнал. 2017. № 1 (120). С. 56–61.

4. *Саранцев, Г.И.* Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. М.: Владос, 2005.
5. *Коржачкина, О.М.* Решение задач как вид мыслительной деятельности: общие методы (на примере предметной области «Математика») // Математика в школе. 2018. № 4. С. 46–57.

**REFERENCES**

1. Hinchin, A.Ya. *Pedagogicheskie stati: voprosy prepodavaniya matematiki, borba s metodicheskimi shtampami* [Pedagogical Articles: Questions of Teaching Mathematics, The Fight against Methodological Cliches]. Moscow, URSS, 2013, 208 p. (in Russ.)
2. Matveeva, V.A. Voronyuk, Yu.D. Modelirovanie kak smysloobrazuyushchij fenomen pri reshenii zadach po matematike [Modeling as a Meaning-Forming Phenomenon in Solving Problems in Mathematics]. In: *Rebenok v sovremennom obrazovatelnom prostranstve megapolisa* [The Child in the Modern Educational Space of the Metropolis: Materials of the VIII International Scientific and Practical Conference]. Moscow, Moskovskij gorodskoj pedagogicheskij universitet, 2021. pp. 205–209. (in Russ.)
3. Samsikova, N.A. Stefanova, N.L. Rol situacionnyh zadach v metodicheskoj podgotovke budushchih uchitelej matematiki [The Role of Situational Tasks in the Methodological Training of Future Teachers of Mathematics], *Kazanskij pedagogicheskij zhurnal* = Kazan Pedagogical Journal, 2017, No. 1 (120), pp. 56–61. (in Russ.)
4. Sarancev, G.I. *Obuchenie matematicheskim dokazatelstvam i oproverzheniyam v shkole* [Teaching Mathematical Proofs and Refutations at School]. Moscow, Vlados, 2005. (in Russ.)
5. Korzhachkina, O.M. Reshenie zadach kak vid myslitelnoj deyatelnosti: obshchie metody (na primere predmetnoj oblasti “Matematika”) [Problem Solving as a Type of Mental Activity: General Methods (On the Example of the Subject Area “Mathematics”)], *Matematika v shkole* = Mathematics at school, 2018, No. 4, pp. 46–57. (in Russ.)



**Матвеева Валентина Александровна,** старший преподаватель, кафедра математики, Сахалинский государственный университет, matveeva89.ru@mail.ruu

**Valentina A. Matveeva,** Senior Lecturer, Mathematics Department, Sakhalin State University, matveeva89.ru@mail.ru

**Самсикова Наталья Алексеевна,** кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики, Сахалинский государственный университет, n.samsikova@mail.ru

**Natalia A. Samsikova,** PhD in Pedagogy, Associate Professor, Mathematics Department, Sakhalin State University, n.samsikova@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 15.04.2022. Принята к публикации 25.05.2022*

*The paper was submitted 15.04.2022. Accepted for publication 25.05.2022*