

О СОДЕРЖАНИИ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: от операции к отношению и темпоритм образовательного процесса

А.В. Боровских

Аннотация. Данная статья является второй в цикле работ, посвященных понятию содержания в математическом образовании. В первой было обосновано введение различения категорий «содержимого» и «содержания» при рассмотрении математического образования — и как процесса, и как результата. Там же было показано, что в качестве содержания процесса математического образования следует положить освоение математических мыслительных средств — знаковых, идеальных, понятийных. При этом основное значение в освоении данных мыслительных средств играет возможность мыслить с помощью этих средств отношения между различными сущностными объектами, и именно в такой функции математические мыслительные средства используются другими науками и сферами деятельности. В представленной статье обосновывается центральная роль освоения в математическом образовании не столько математических операций, сколько математических отношений и представлена темпоритмическая структура процесса математического образования в виде системы циклов, в рамках которых происходит освоение математических мыслительных средств и математических отношений. В третьей, заключительной статье на примере арифметики будет показано, как в эту темпоритмическую структуру вкладывается «содержимое» математического образования, представленное в учебниках и образовательных программах, и какое «содержание» необходимо мыслить, проектируя процесс для того, чтобы он давал требуемый результат.

Ключевые слова: содержание школьного математического образования, категории формы, содержимого и содержания, мыслительные средства, знаковые и идеальные средства мышления, понятия, мыслительные операции и отношения, система, темпоритм и циклы.

Для цитирования: Боровских А.В. О содержании школьного математического образования: от операции к отношению и темпоритм образовательного процесса // Преподаватель XXI век. 2025. № 1. Часть 1. С. 129–144. DOI: 10.31862/2073-9613-2025-1-129-144

129

© Боровских А.В., 2025



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ON THE CONTENT OF SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION:

From operation to relation and Tempo-rhythm of the educational process

A.V. Borovskikh

Abstract. *This article is the second one in the series of papers devoted to the concept of content in mathematics education. In the first paper, the introduction of a distinction between the categories of “content” and “function” was justified when considering mathematical education, both as a process and as a result. It was also shown there that the content of the process of mathematical education should include the mastering of mathematical thinking means of symbolic, ideal and conceptual type. At the same time, the main use of these mental means is the ability to think with the help of these means about the relationships between various essential objects. This is the main way of use of mathematical mental means by other sciences and fields of activity. The paper presented here substantiates the central role of mastering in mathematical education not so much mathematical operations as mathematical relations and presents the tempo-rhythmic structure of the process of mathematical education in the form of a system of cycles within which the mastering of mathematical thinking means and mathematical relations occurs. In the third final paper, using the example of arithmetic, it will be shown how the “content” of mathematical education, presented in textbooks and educational programs, is embedded in this tempo-rhythmic structure and what “function” needs to be thought about when designing a process in order to obtain the required result.*

Keywords: *content of school mathematical education, categories of the form, content and function, mental means, symbolic and ideal means of thinking, concepts, mental operations and relationships, system, tempo-rhythm and cycles.*

Cite as: Borovskikh A.V. On the Content of School Mathematics Education: From Operation to Relation and Tempo-rhythm of the Educational Process. *Prepodavatel XXI vek. Russian Journal of Education*, 2025, No. 1, part 1, pp. 129–144. DOI: 10.31862/2073-9613-2025-1-129-144

Введение

Настоящая статья является продолжением работы «О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как совокупность мыслительных средств», опубликованной в Вестнике Московского университета в 2024 г. [1], и связана с обсуждением содержания математического образования. Напомним кратко ее основные тезисы:

- При обсуждении образования (и как процесса, и как результата) необходимо различать «содержание» и «содержимое». Это — модификация категориальной пары «форма — содержание», связанная с тем, что в отличие от естественно-научной позиции (где пары «форма — содержание» вполне достаточно), в позиции гуманитарно-научной, деятельностной, приходится различать объективное (можно сказать, материальное) «содержимое», которое облечено в ту или иную форму, и субъективное, мыслимое «содержание», под которым понимается та функция, которую это «содержимое» в этой форме выполняет в нашей жизни и деятельности.

- Так, функциональность математики — не в теоремах, задачах или доказательствах, а в том, что ее мыслительные средства позволяют мыслить отношения

между сущностями различной природы. Поэтому математика, если рассматривать ее как составляющую человеческой культуры, представляет собой совокупность мыслительных средств, которые в процессе математического образования подлежат освоению.

- С этой точки зрения содержанием математического образования как процесса является интеллектуальное развитие, состоящее в освоении ребенком средств математического мышления и различных способов их использования. А содержанием математического образования как результата становится умение с помощью этих средств мыслить отношения между сущностями различной природы.

- Наконец, категориальный анализ понятия процесса позволяет нам утверждать, что для него триада форма — содержимое — содержание реализуется в виде отношения темпоритма (который является временной формой), изменений (которые являются содержанием процесса — это то, что мы видим) и развития (которое является содержанием процесса — это то, что мы мыслим за этими изменениями и то, что придает этим изменениям определенный смысл).

В настоящей работе сначала остановимся более подробно на функциях математических мыслительных средств, и покажем, что для того, чтобы эти мыслительные средства действительно работали, необходимо освоение в процессе обучения математике не столько различных математических операций, сколько нескольких важнейших типов математических отношений. Затем перейдем к формальной стороне образовательного процесса, описав его в виде определенной системы циклов как темпоритмических единиц.

1. Способы использования математических мыслительных средств

Зафиксировав тот факт, что функциональность математики в культуре состоит в том, что она доставляет другим наукам и сферам деятельности специфические мыслительные средства (а точнее — системы мыслительных средств), следует выяснить, как же именно используются эти мыслительные средства.

Автору в настоящий момент известно [2] четыре способа использования математических мыслительных средств:

- в качестве метафоры;
 - для представления отношений между сущностями в собственном содержании той или иной науки или вида деятельности;
 - в качестве операционального средства;
 - для представления сущностей собственного содержания (в квантовой механике).
- Остановимся на каждом из этих способов подробнее.

Использование математических мыслительных средств в качестве метафор достаточно широко распространено. Довольно часто можно услышать чисто математические термины «нелинейность», «фрактальный», «бифуркация», «вероятность» и др. в ситуациях, которые к математическому содержанию этих понятий никакого отношения не имеют. Хотя математика здесь оказывается используемой вроде бы не по делу, тем не менее такой способ использования математических мыслительных средств вполне законный.

Дело в том, что отрасли и разделы науки, находящиеся на феноменологической стадии развития (т.е. ограничивающиеся в силу тех или иных причин только наблюдением

тех или иных феноменов, явлений [см.: 3]) не имеют собственных мыслительных средств, позволяющих эти феномены структурировать и как-то ими мысленно оперировать. Такие мыслительные средства появляются только на *эмпирической стадии*, когда совершается переход от наблюдения явлений к их *изменению и воспроизводству*. А до тех пор такие науки вынуждены *заимствовать* подходящие термины из других наук и сфер деятельности.

Метафорический способ известен еще с глубокой древности. Еще Аристотель описывал падение тела, брошенного произвольным движением руки, как движение сначала по наклонной прямой, затем по дуге окружности, а затем вертикально вниз (тоже по прямой). Не правда ли, странное (ведь любой семиклассник знает, что тело летит по параболе) представление? А дело в том, что это представление — *метафорическое*.

Аристотель (в отличие от Галилея) не изменял движение, а только наблюдал. И в наблюдении структурировал его на три фазы. Которые назвал *метафорически* движением «по наклонной прямой», «по окружности» и «вертикально вниз», взяв термины из уже развитой к тому времени науки — геометрии.

Кстати, математики также используют разнообразные термины из других наук метафорическим образом. «Уравнение струны» к реальной струне имеет очень условное отношение. Так же как и «уравнения гидродинамики» к движению жидкостей, а «кристаллографические группы» — к представлениям о кристаллах в физике или в химии.

Итак, использование мыслительных математических средств в качестве метафор не нужно рассматривать как глупость или неграмотность, но и не нужно ставить во главу угла математического образования, поскольку это использование носит побочный характер. Достаточно лишь отметить, что возможность такого использования математических мыслительных средств обеспечивается даже не *математическим образованием*, а лишь *математическим просвещением*, т.е. ознакомлением с общими представлениями и различиями, имеющимися в математике.

Наиболее широко распространенным использованием математических мыслительных средств является второй способ — для *представления отношений* между сущностями в собственном содержании той или иной науки или сфере деятельности. Становится это возможным тогда, когда эти отношения оказываются *такими же*, как те или иные известные математические. Бывает, конечно, что физика, химия или другая наука выделяет некие отношения, которые, будучи абстрагированы от предметного содержания, становятся потом математическими, однако такие сюжеты характерны только для профессиональной науки, и находятся далеко за рамками математического образования как школьного, так и вузовского.

А так — практически ни одна сфера деятельности не обходится без аддитивных и мультипликативных *количественных отношений*. Учебники практически по всем дисциплинам, не исключая гуманитарные, наполнены формулами типа $a = b + c$ или $a = bc$ и более сложными. Часто встречаются *отношения между переменными величинами*, выраженными функциональными зависимостями. В наиболее «продвинутых» случаях мы встречаем и отношения между малыми (в математике — бесконечно малыми) *изменениями величин* типа $dF = udx$ или $dG = f(x,y,z)dxdydz$. Наконец, совсем уже «математически оснащенные» науки используют *отношения между функциями*, представляемыми дифференциальными уравнениями.

Третий способ использования математики, когда применяются уже *математические операциональные системы*, систематически употребляется только в физике и в инженерии. Это уже гораздо более серьезный уровень.

В других науках и сферах деятельности на самом деле те или иные конкретные направления исследований или разработок также, бывает, используют математические операциональные системы, но по странному стечению обстоятельств эти направления тут же приобретают атрибут «физики» или «инженерии»: биофизика, геофизика, биоинженерия, социоинженерия, психофизика и пр. Поэтому получается, что в конечном счете к математическим операциональным средствам другие науки и сферы деятельности обращаются или через «физику» (т.е. некоторую систему представлений о *естественных* процессах), или через «инженерию» (т.е. некоторую систему представлений о создании *искусственных* объектов и процессов).

Важно отметить, что использование математических операциональных систем в той или иной науке появляется только тогда, когда возникает достаточно определенная *собственная операциональная система*, оперирующая с собственными сущностями этой науки. Пока ее нет (в частности, ее точно нет в науках, находящихся на стадии феноменологии), об использовании математических операциональных систем речи идти не может.

Четвертый упомянутый выше способ использования математики является уникальным и применяется только в одной известной автору науке — в квантовой физике. Дело в том, что, в отличие от других наук, которые пользуются языком и представлениями, взятыми из обыденного опыта (лишь рафинированными в том, что и как понимается), квантовая физика имеет дело с объектами и явлениями, аналогов которым и, соответственно, терминов для которых в окружающем нас мире нет. Сказать, что электрон — это частица, будет метафорой. Волна — тоже метафора. Нет ничего хоть сколько-нибудь родственного этому объекту, на что, как на прототип, можно было бы опереться. Поэтому в квантовой физике в качестве *средства представления самой сущности* (а не отношения между уже имеющимися сущностями) берутся математические объекты. Электрон — это волновая функция. Измерение — это оператор. И так далее. Но это пока что уникальный способ, и пока неясно, куда он в конце концов приведет.

Следует отметить, что математические средства мышления могут использоваться и в целях *профанации*. Конечно, с точки зрения педагогической это ценности не представляет, но различать такие способы нужно. Автору известно три типа профанаций: «вульгарное моделирование», «маскировка» и «наукообразия».

Вульгарное моделирование — тип профанации, когда исследователь какой-то математический объект интерпретирует (без каких бы то ни было обоснований) как *модель* чего-то в той или иной науке, и чисто математические свойства данного объекта (обычно хорошо известные) представляет, как «новое знание» в этой науке.

Конечно, ничего полезного такая деятельность не приносит, но опровергать такие «результаты» достаточно сложно, поскольку для этого нужно иметь достаточную компетентность и в «той» науке, и в математике, и в общей методологии науки. Иначе математикам такой «изобретатель» будет объяснять, что это следует из той, другой науки (или, наоборот, очень значимо для нее), представителям той, другой науки — что это следует из математики, а если на него «нападут» и те

и другие одновременно — что они просто говорят на разных языках, и не могут понять тех высших соображений, которые связывают соответствующую науку с математикой.

На такие результаты проще всего просто не обращать внимания. Многие ученые так и делают, но такого рода «деятели» могут создавать целые «научные школы», представители которых обычно свято верят в непогрешимость «патрона», любые возражения принимают как враждебные и нацеленные «против их науки» и проявляют неоправданную агрессивность и токсичность в научных коммуникациях.

Тип профанации, который мы назвали *маскировкой*, очень широко распространен, а в гуманитарных науках встречается практически повсеместно под вывеской «статистических методов исследования».

Ситуация выглядит примерно так: содержательного результата с точки зрения соответствующей науки нет; то, что сделано — достаточно банально, и не заслуживает того, чтобы считаться научным результатом (например, в педагогике — кто-то кого-то чему-то учил, и в результате чему-то выучил). И вот теперь начинается *маскировка* этого отсутствия результата математикой. Что-то начинает измеряться до и после, в контрольной и экспериментальной группе, считаются коэффициенты корреляции, определяется доверительный интервал, используется критерий хи-квадрат... Проводится факторный и кластерный анализ всех этих данных.

В общем, получается такое объемистое «исследование». За которым, как мы понимаем, ничего не стоит. Потому, что за всем этим (как мы приводили в качестве примера — обучением кого-то чему-то) не стоит ничего *мыслимого*. Собраны данные о том, что *видимо*. Что из этих данных *существенно*, а что нет — не ясно. Какое отношение эти данные имеют к *сущности* (скажем, педагогического действия) — неясно. Каковы *сущностные отношения* (в той же педагогической деятельности) — не определено. Являются ли эти отношения стохастическими, можно ли с ними оперировать как со стохастическими объектами — всё это оказывается «за кадром», а в результате мы фактически изучаем, используя математические средства, совершенно случайный набор данных, которые ничего не характеризуют и ни о чем не говорят.

Этот тип профанации, к сожалению, нередко закреплён институционально, так что человек, который этим занимается, бывает искренне удивлен, когда ему начинают задавать «неудобные вопросы». «Что Вы ко мне придираетесь — все так делают!» И переломить вот такую «культурную норму» бывает очень и очень трудно.

Наконец, третий тип профанации — *наукообразие*, который также широко распространен, но с которым бороться — всё равно, что летом с мухами: сколько ни выгоняешь их из комнаты — они опять летят. Возникает он тогда, когда человек ничего не понимает, ничего не создает, но «наваливает» кучу слов и терминов, создающих внешнее впечатление чего-то очень умного. По сути же это — чистое «сотрясение воздуха», набор слов, за которым ничего не стоит.

Завершая этот круг вопросов, можно сформулировать третий и четвертый центральные тезисы данной работы (первые два были сформулированы в [1]):

Математика используется в той или иной сфере деятельности ровно в той степени, в которой отношения между сущностями, которые являются предме-

том этой деятельности, выразимы математическими средствами. В тех сферах, где сложилась та или иная система оперирования с сущностями, из математики могут быть взяты те или иные операциональные системы: арифметическая, аналитические, алгебраические, геометрические, логические и пр.

2. От операции к отношению

Зафиксировав тот факт, что основным способом использования математических средств, без которого математика оказывается бессмысленной, является представление с помощью этих средств *отношений между различными сущностями*, следует задаться вопросом о том, как это происходит.

Ответ на данный вопрос оказался тесно связан с вопросом о математической грамотности, который автором обсуждался в недавней работе [4]. В ней, помимо прочего, была представлена общая схема действий, необходимых для решения задач. Она включает:

- анализ текста задачи и выделение необходимых данных;
- схематизация *отношений между* этими данными;
- отыскание аналогичных *математических отношений*;
- перенос на математические отношения данных задачи и формулировка математической постановки задачи;
- решение математической задачи в рамках той или иной системы операций со знаковыми средствами;
- переход при необходимости от одной знаковой системы к другой (например, от алгебраической к графической);
- формулировка ответа для математической задачи;
- интерпретация ответа и при необходимости промежуточных результатов, на схеме;
- формулировка ответа на исходную задачу в терминах этой задачи и оценка соответствия ответа смыслу задачи.

Как мы видим, переход от данных задачи к математике, зафиксированных во второй и третьей позиции, осуществляется через соотнесение отношений между этими данными, представленными некоторой схемой с теми или иными *математическими отношениями*. Именно *изоморфизм* отношений позволяет нам перейти к математическим формулировкам. И именно он позволяет нам, поставив и решив математическую задачу (или несколько задач), вернуться к схеме и *проинтерпретировать* полученное решение в терминах исходной задачи и отношений между данными этой задачи.

Но тогда ключевой точкой в использовании математики являются *математические отношения*, с помощью которых представляются отношения между сущностями в тех или иных науках и сферах деятельности. И именно способность представлять те или иные отношения через математические является *содержанием математического образования как результата*.

И тут мы обнаруживаем огромную «дыру» уже в *содержании математического образования как процесса*.

Начнем с простого примера. Во всех школьных учебниках есть такая картинка (рис. 1 слева): два кружочка обведены, три кружочка обведены, и есть общий обвод. Под картинкой подпись: « $2 + 3 = 5$ ». И только в одном учебнике имеется аналогичная картинка (рис. 1 справа), где под схемой с кружочками написано три операции. Чем они отличаются?

В первом случае схема иллюстрирует *числовую операцию*, а во втором — *числовое отношение*, отношение между числами 2, 3 и 5. В чем разница? Числовое отношение как бы «собирает» в себе все три операции, позволяя, в зависимости от необходимости, «развертывать» любую из них.

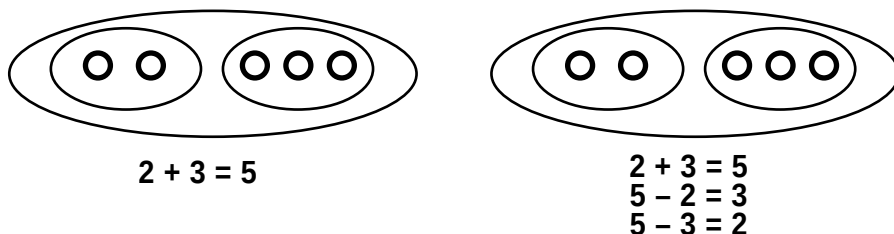


Рис. Операция (слева), отношение (справа)

Так вот, к сожалению, тот учебник, в котором схема представляет числовое отношение, а не операцию, уже вышел из числа употребляемых, а в учебниках, использующихся в современной школе, переход от числовых операций к числовым отношениям никак не предусмотрен!

Конечно, большая часть учащихся всё равно этот переход совершают: кто благодаря бабушке, кому папа подскажет, кому сосед по парте. Но этот переход совершается не благодаря обучению, а вопреки ему. И это — очень печальное обстоятельство.

Тем более, что в дальнейшем история повторяется, и перехода от операций к отношениям не происходит и при освоении других мыслительных средств. Хотя именно *математические отношения*, как мы выяснили, составляют содержание математического образования в результативном залоге.

Сделаем краткий экскурс по тем *математическим отношениям*, которые составляют основной багаж *математически образованного* человека (и которые как раз и оказываются не освоенными в результате математического образования).

- *Таблицы сложения и умножения* представляют *числовые отношения* (а отнюдь не *числовые операции*, как думают некоторые). Ребенок, который видит в них числовые операции, а не числовые отношения, не сможет по таблице сложения выполнить вычитание, а по таблице умножения — деление. В этом контексте представляются забавными предложения ввести в курс арифметики «таблицы вычитания», которые начали недавно появляться.

- *Формулы* $a(b+c)=ab+ac$, $S=vt$, $y=ax^2+bx+c$ представляют собой *отношения между величинами*. Учащийся, который видит в них не отношения, а операции, не сможет воспользоваться распределительным законом «в обратную сторону», т.е. преобразовать $ab+ac$ в $a(b+c)$. А учитель физики потом будет проклинать математиков, которые учили детей неизвестно чему — путь известен, скорость известна, учащиеся не могут найти время. А причина проста — они видят в формуле $S=vt$ не *отношение*, а *операцию*.

- Функция $y = \sin x$ представляет собой *отношение между переменными величинами*. Отметим, что само понятие переменной величины в школе не только не формируется, но и не обсуждается, а без него правильного понимания того, что такое функция и зачем она нужна, не будет.

- *Геометрическая фигура* представляет собой *систему отношений между ее элементами*. Школьники, которые не освоили такое представление о геометрической фигуре, никогда не смогут решить даже простейшую геометрическую задачу. А в школьной геометрии такого представления не формируется, и об этом в методике обучения нет даже намека — методика обучения геометрии в школе оперирует теоремами, формулами, построениями, доказательствами и пр., но только не отношениями и не системами отношений.

- *Логические выводы* представляют собой особый тип отношений — *отношения между отношениями*. Этот тип отношений совсем не обсуждается в школьном курсе математики, логика как организованность мышления (вот это — как раз про «ум в порядок приводит») заменяется правилами построения рассуждений.

- Производная $\frac{dy}{dx}$ представляет собой *отношение между изменениями величин*.

Точно так же, как и формула $dV = dx dy dz$.

- Дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = x^2 - x$ представляет собой *отношение между функциями*.

- *Алгебраические структуры* представляют собой *отношения между различными операциями и системами операций*.

- *Оператор* (в функциональном анализе) представляет собой *отношение между классами функций*.

Список можно продолжать, но для нашего изложения важно то, что доведение владения учащимися математическими мыслительными средствами до *овладения математическими отношениями* является содержанием математического образования уже как процесса. И именно в этом состоит интеллектуальное развитие учащихся, о котором мы говорили выше.

Таким образом, пятый центральный тезис данной работы может быть сформулирован следующим образом:

Результатом математического образования имеет смысл считать не просто освоение операций с мыслительными средствами, а освоение системы математических отношений, которые этим средствами представляются.

3. Темпоритмическая структура процесса математического образования

Наконец, благодаря проделанным рассуждениям и, главное, полученным выводам, мы можем вернуться к главному вопросу — о представлении математического образования как процесса, в котором функциональное *содержание* (т.е. освоение математических мыслительных средств и отношений, которые ими представляются) реализуется в определенной темпоритмической *форме*, в которую облачено *содержимое* — решение задач, доказательство теорем и пр., и пр.

С точки зрения общего представления о темпоритмах, развертывание процесса во времени представляет собой соорганизацию неких *циклов*. И сейчас мы можем

перечислить наиболее важные из них. Базовыми в интеллектуальном развитии являются следующие циклы:

- цикл освоения средства-способа (Б.Д. Эльконин [5]): результативное действие — учебное действие — учебно-игровое действие (опробование границ способа) — продуктивное действие;
- цикл экстерииоризации-интериоризации (интегральная схема Л.С. Выготского [6]): проблемная ситуация — осознание — экстерииоризация действия — проблематизация — трансформация действия — нормировка действия — интерииоризация;
- цикл трансформации управления действием (расширенная схема П.Я. Гальперина [7, см. также в 8]): громкоречевое внешнее (материальное/материализованное) действие — громкоречевое мысленное действие — внутренняя речь — свернутое действие — внутренняя речь — внешнеречевое действие — материальное действие с громкой речью;
- цикл операция-отношение: освоение операции — выделение отношения — представление отношения — подчинение операции отношению — освоение операций с отношением;
- цикл абстрагирования — конкретизации;
- цикл идеализации — моделирования;
- цикл П. Жанэ [9] (объект-субъект-автакт);
- цикл систем: система-0 (протосистема, коллекция элементов) — система-1 (система-структура, построение отношений между элементами) — система-2 (функциональная система, построение отношений элементов к системе в целом) — система-3 (квазиорганическая — формирование подсистем, функциональные отношения переходят к подсистемам) — система-4 (развивающаяся, появляются процессы трансформации и замены состава подсистем, а также средства взаимодействия с другими системами).

Большая часть из названных конструктивов хорошо известна, но все они здесь так или иначе модифицированы, поэтому прокомментируем кратко то, что является новым или модифицированным.

Цикл освоения средства (или способа использования уже имеющегося средства) был в явном виде сформулирован несколько лет назад Б.Д. Эльconiным в его докладе на семинаре (в работе [5] он, к сожалению, лишь упоминается). Он выделил четыре типа «образовательных действий», как он их назвал. Первое действие — *«результативное»*, оно направлено на результат. Такое действие мы осуществляем, например, когда нашей целью является дойти до ответа задачи, как говорится, «хоть чуелом, хоть тушкой». Образовательное действие второго типа — *«учебное»*, в строгом понятийном смысле этого слова, т.е. действие, направленное на выделение и освоение способа или средства — решив какую-то новую задачу, нужно понять, за счет чего нам удалось ее решить. Какое новое средство мы использовали и каким способом. Третий тип образовательного действия — *«учебно-игровое»*, оно направлено на *опробование границ* применения того или иного способа использования того или иного средства. И, наконец, собирающее то, что наработано предыдущими тремя действиями, *«продуктивное»* действие — когда мы не просто *решаем задачу и получаем ответ*, но и мы прекрасно понимаем, каким *способом* мы это делаем, и, главное, знаем, что *в данных условиях* этот способ дает *верный* ответ.

Цикл *экстериоризации-интериоризации* фактически собран из двух процессов, детально описанных Л.С. Выготским в [6] — процесса интериоризации, т.е. превращения внешнего действия во внутреннее, мыслительное и процесса экстериоризации, т.е. превращения внутреннего, мыслительного действия во внешнее. Реальный педагогический процесс всегда содержит обе этих фазы, поскольку за исключением некоторой начальной его части, всегда связан не с простым освоением средств и способов, а главным образом с *трансформацией* [10] способов действия и, что нередко случается, соответствующих мыслительных средств.

Схема трансформации имеет следующий вид: учащимся дается задача, которая имеющимися у них средствами и способами не решается. Неудачные попытки решения создают *проблемную ситуацию*, и требуют *рефлексии*, т.е. *осознания* (это первый шаг экстериоризации — вынесение стереотипного действия из подсознания в сознание) ситуации как проблемной и *осмысления* (для этого действие нужно вывести во внешнюю, материальную форму — например, выписать на бумаге и соотнести с теми *условиями*, в которых это действие применимо). После фиксации того, что мы вышли за рамки применимости данного способа/средства (это обычно называют *проблематизацией*) осуществляется *введение нового способа или средства* (это может происходить по-разному, начиная от того, что учителем оно просто предъявляется, и кончая тем, что учитель создает специальный подпроцесс, в котором дети сами «изобретают» новый способ). Затем этот новый способ или средство осваивается в рамках цикла, описанного в предыдущем пункте, и, по мере освоения, переходит обратно из внешней формы во внутреннюю, в конце концов, как говорят, «сворачиваясь», т.е. уходя из сознания в подсознание и осуществляясь в дальнейшем практически автоматически, стереотипно. До тех пор, пока не возникнет новая проблемная ситуация.

Схема П.Я. Гальперина отличается от схемы Л.С. Выготского тем, что она описывает формирование и трансформацию не самого мысленного действия, а *средств управления этим действием*. В случае математических действий (которые по типу относятся к наглядно-образным) средства управления действием обычно являются *речевыми*.

Наличие речевых средств управления мысленным действием играет фундаментальную роль в процессах экстериоризации и интериоризации. Без них уже сформированное действие невозможно ни трансформировать, ни встроить в более сложное. Так, в музыке хорошо известен такой термин, как «заиграл»: что-то сбилось, и пальцы бегают не в том порядке. Это тупик, исправить ничего нельзя, нужно пьесу разучивать заново, сначала медленно, а потом доводить до нужного уровня исполнения. В точности то же самое происходит, когда математическое действие освоено, а средств управления им не сформировано. Человек оказывается в ситуации, когда он не может произвольным образом строить свое действие, а может только «включить» одну из сформированных у него реакций.

К сожалению, такого рода «обученность» математике встречается довольно часто, даже среди студентов мехмата МГУ. И самое печальное — это то, что такая «обученность» оказывается абсолютно бесполезной, поскольку те конкретные условия, в которых выученное действие действительно применимо, практически не встречаются. В этом смысле очень показателен опыт ЕГЭ, при подготовке к которому детей

натаскивают на решение по алгоритму определенных типов задач, после чего выясняется, что учащийся, прекрасно сдавший ЕГЭ, в университете оказывается двоечником и в конце концов вынужден распрощаться с математикой.

Про переход от отношения к операции мы уже довольно подробно говорили, но в схеме цикла мы видим и обратное движение, с одной стороны, освоение навыков построения операции из отношения, а с другой — включение сформированного отношения в систему операций более высокого уровня. Как можно увидеть из приведенного в предыдущем параграфе списка типов математических отношений, они действительно образуют определенную иерархическую систему, которая во многом «параллельна» иерархии знаковых средств, хотя и в деталях может существенно отличаться.

Про операции *абстрагирования* и *идеализации* мы достаточно подробно говорили в первой части нашей работы [1], и даже упоминали тот факт, что *абстрактное мышление* связано с удержанием связи между разными уровнями абстракции. Собственно, переходы от более абстрактных объектов к более конкретным и наоборот и являются средством удержания этой связи. Решили конкретный пример — нужно сформулировать, что мы сделали в более общих терминах. Получили общую формулу — нужно посмотреть, что она дает на конкретных примерах, в конкретных ситуациях.

Гораздо сложнее обстоит дело с *идеализациями*, поскольку, в отличие от абстрагирования, эта операция необратима. При идеализации мы получаем объект, у которого некоторые свойства выражены в *предельной* форме, а некоторые — просто отсутствуют (как у Евклида: «Линия — это то, что не имеет ни ширины, ни толщины, а имеет только длину»). Идеальный объект по отношению к реальному является некоей «патологией», карикатурным искажением. Поэтому вернуться от этой «патологии» к первообразу простым обращением действия идеализации невозможно. Для этого используется другая операция, которую обычно называют *моделированием*. Так же, как по трем проекциям в чертежах, мы можем восстановить пространственный объект, с помощью *системы идеальных представлений* мы можем восстановить в своем мышлении нечто подобное реальному объекту (и далее даже реализовать это в материальном исполнении). *Моделирование* как раз и есть построение такой системы идеальных представлений, которая соответствует, с допустимой для нас *точностью*, реальному объекту.

Циклы идеализации-моделирования очень важны с точки зрения результата математического образования, поскольку именно эти действия позволяют, с одной стороны, удерживать связь идеального мира и мира реального, а с другой — достаточно точно чувствовать их различие. Впрочем, это имеет значение для тех сфер деятельности, где уже перешли от *феноменологии* (т.е. просто наблюдения и фиксации феноменов) и *эмпирии* (т.е. изменения феноменов и фиксации законов этих изменений) к *теории* (т.е. выделению сущностных отношений и построению системы операций с ними, позволяющими не только воспроизводить имеющиеся феномены, но и создавать конструктивно что-то новое, чего в природе не было и не могло быть).

Цикл П. Жанэ играет фундаментальную роль в формировании *управления* своим интеллектом. Собственно, П. Жанэ обнаружил, исследуя поведение дошкольников, что, когда к ребенку применяют какое-то действие, он затем не только пытается сам совершить это действие по отношению к другому человеку (что нам, конечно, пред-

ставляется вполне естественным), но и затем применяет это действие к самому себе, как к «другому» (и вот это открытие П. Жанэ было совершенно неочевидным).

Значение этого открытия — в том, что схема «объект» (когда ребенок выступает в роли объекта действия) — «субъект» (когда он сам совершает действие по отношению к другому) — «автакт» («авт»+«акт», когда ребенок направляет действие на самого себя) оказывается чуть ли не единственной схемой формирования действий, направленных на самого себя (и которые нужно называть «психическими функциями» в узком смысле этого слова).

Если учитель хочет сформировать у детей *самоконтроль* — ему нужно научить их контролю за другим ребенком. Если он хочет, чтобы дети освоили *самоорганизацию*, то ему следует так построить работу, чтобы дети организовывали деятельность друг друга (собственно, именно так все было у А.С. Макаренко [11]).

По отношению к математическому образованию схема П. Жанэ важна прежде всего потому, что без формирования действия *обращения к собственным* умениям и навыкам ребенок оказывается абсолютно беспомощным, даже полностью освоив всю программу математики. Вряд ли найдется педагог, который не сталкивался с ситуацией, когда учащийся прекрасно знает, скажем, теорему Виета, но пока ему учитель или кто-то другой не скажет ему: «Вася, ну воспользуйся же теоремой Виета!», он сам этого ни за что не сделает. Именно потому, что у него не сформирован навык управления собственным интеллектом, навык обращения к тем действиям, которые он освоил.

Наконец, требует отдельного обсуждения *цикл систем*. В отличие от циклов освоения средства или способа, экстерииоризации-интерииоризации, управления действием, которые являются «мезомасштабными», т.е. происходят в пределах нескольких уроков, и в отличие от циклов операция-отношение или абстракции-конкретизации, которые являются «микромасштабными», т.е. могут происходить по несколько раз в рамках одного урока, цикл систем является «макромасштабным», поскольку он характеризует процессы, растягивающиеся на несколько месяцев, а то и лет.

Для того чтобы пояснить суть проблемы, из-за которой этот цикл вводится в рассмотрение как существенный, мы обсудим один сюжет, который случился год назад на семинаре В.А. Львовского, посвященном проектированию сценариев введения физических понятий. Семинар был очень интересный, и в нем участвовали разные специалисты: школьные учителя, преподаватели вузов, методисты, специалисты в области педагогики, физики.

Руководитель семинара предложил всем желающим попробовать разработать и реализовать сценарий урока по введению того или иного физического понятия. Было несколько попыток, которые все оказались неудачными. При этом в дискуссии регулярно разворачивался один и тот же сюжет: либо человек (обычно это был школьный учитель или преподаватель педагогического вуза) предлагал вариант, который отвергался специалистом в области физики, как «не соответствующий современным представлениям», либо специалист в области физики (ученый или преподаватель физики в вузе) предлагал вариант, который категорически отвергался учителями потому, что «для детей это просто недоступно», да и вдобавок при этом оказывалось, что приходится опираться на то, что дети еще не знают.

Проблема оказалась в том, что система современных физических понятий — это «система-2», с постепенным переходом в «систему-3». Она организована так, что в ней

построены отношения понятий *к системе в целом*. Каждое понятие выполняет в ней свою функцию. Понятно, что «ввести» такое понятие отдельно от системы невозможно. И в этом и состоит весь фокус.

Что это означает? Что необходимо проектировать и выстраивать в образовательном процессе вот этот самый «цикл систем». То есть сначала вводить «предпонятия», каждое по отдельности, и получить «коллекцию». Затем через выстраивание связей этих понятий друг с другом трансформировать ее в систему-1 (при этом и сами понятия трансформируются, они не остаются неизменными — у них появляются определенные границы, родо-видовые отношения и т.д.). И только потом уже сложившуюся систему переструктурировать, выстроив отношения понятий к системе в целом, перестроив при этом систему связей между понятиями и еще раз изменив сами понятия.

Таким и только таким образом мы можем получить в качестве результата математического образования и *систему* мыслительных средств, и *систему* математических отношений, соответствующих современному уровню науки.

Резюмируя обсуждения, можно сформулировать шестой центральный тезис данной работы.

Процесс освоения математических мыслительных средств представляет собой организацию, посредством перечисленных выше циклов, деятельности по освоению математических мыслительных средств и представляемых ими отношений.

Заключение

Таким образом, мы, во-первых, выделили *математические отношения* как центральную содержательную составляющую математического образования. С одной стороны, она придает завершенность любому циклу освоения некоторого набора математических мыслительных средств. С другой — является основным, опорным элементом в решении практических задач, поскольку именно через идентичность отношений происходит переход от отношений между данными той или иной задачи к математическим отношениям и появляется возможность постановки уже соответствующей математической задачи. Во-вторых, мы представили темпоритм образовательного процесса в виде системы циклов как временных единиц. Каждый цикл имеет свою структуру и связан с той или иной характеристикой содержательной стороны процесса.

В третьей, заключительной статье этого цикла мы, на материале школьной арифметики, продемонстрируем, как в виде такой системы циклов оформляется содержимое процесса математического образования и какое содержание определяет именно такую конструкцию этого процесса.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение №075-02-2025-1530.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских, А.В. О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как совокупность мыслительных средств // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. 2024. Т. 22. № 2. С. 61–82.

2. Боровских, А.В. О содержании математического образования. Математика для не-математиков // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2022. № 4. С. 51–65.
3. Боровских, А.В. Деятельностная педагогика. Схемы педагогического мышления. М.: МАКС Пресс, 2020. 352 с.
4. Боровских, А.В. О понятии математической грамотности // Педагогика. 2022. Т. 86. № 3. С. 33–45.
5. Эльконин, Б.Д. Строение действия и периодизация Д.Б. Эльконина // Деятельностный подход в образовании: монография. Книга 3 / сост. В.А. Львовский. М.: Авторский Клуб, 2020. С. 104–117.
6. Выготский, Л.С. История развития высших психических функций // Собрание сочинений: В 6 т. Т. 3. Проблемы развития психики. М.: Педагогика, 1983. С. 5–328.
7. Гальперин, П.Я. О методе поэтапного формирования умственных действий // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии: работы советских психологов периода 1946–1980 годов / ред. И.И. Ильясов, В.Я. Ляудис. М.: Издательство Московского университета, 1981. С. 97–101.
8. Талызина, Н.Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий // Теории учения: хрестоматия: учеб. пособие / ред.-сост. Н.Ф. Талызина, И.А. Володарская. М.: Российское психологическое общество, 1996. С. 98–137.
9. Жанэ, П. Психологическая эволюция личности / пер. с фр. Н.Ю. Федуниной. М.: Академический Проект, 2010. 399 с.
10. Боровских, А.В., Верёвкина, В.Е. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема Неравенства // Наука и школа. 2015. № 5. С. 77–87.
11. Макаренко, А.С. Педагогическая поэма. М.: ИТРК, 2003. 736 с.

REFERENCES

1. Borovskikh, A.V. O sodержanii shkolnogo matematicheskogo obrazovanija. Chast I. Ot sodержimogo k sodержaniju: matematika kak sovokupnost myslitelnyh sredstv [On the Content of School Mathematics Education from Contents to Content: Mathematics as a System of Mental Means], *Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 20. Pedagogicheskoe obrazovanie* = Lomonosov Pedagogical Education Journal, 2024, vol. 22, No. 2, pp. 61–82. (in Russ.)
2. Borovskikh, A.V. O sodержanii matematicheskogo obrazovanija. Matematika dlja ne-matematikov [About the Content of Mathematical Education. Mathematics for Non-Mathematicians], *CONTINUUM. Matematika. Informatika. Obrazovanie* = CONTINUUM. Maths. Informatics. Education, 2022, No. 4, pp. 51–65. (in Russ.)
3. Borovskikh, A.V. *Dejatel'nostnaja pedagogika. Shemy pedagogicheskogo myshlenija* [Activity Pedagogy. Schemes of Pedagogical Thinking]. Moscow, MAKS Press, 2020, 352 p. (in Russ.)
4. Borovskikh, A.V. O ponjatii matematicheskoy gramotnosti [On the Concept of Mathematical Literacy], *Pedagogika* = Pedagogy, 2022, vol. 86, No. 3, pp. 33–45. (in Russ.)
5. Elkonin, B.D. Stroenie dejstvija i periodizacija D.B. Jelkonina [Structure of Action and Periodization of D.B. Elkonin]. In: *Dejatel'nostnyj podhod v obrazovanii: monografija. Kniga 3* [Activity-based Approach in Education: A Monograph. Book 3], comp. by V.A. Lvovskij. Moscow, Avtorskij Klub, 2020, pp. 104–117. (in Russ.)

6. Vygotskij, L.S. Istorija razvitiya vysshih psihicheskikh funkcij [History of the Development of Higher Mental Functions]. In: *Sobranie sochinenij: V 6 t. T. 3. Problemy razvitiya psihiki* [Collected Works: In 6 Vols. Vol. 3. Problems of the Development of the Psyche]. Moscow, Pedagogika, 1983, pp. 5–328. (in Russ.)
7. Galperin, P.Ja. O metode pojetapnogo formirovaniya umstvennyh dejstvij [On the Method of Step-By-Step Formation of Mental Actions]. In: *Hrestomatija po vozrastnoj i pedagogicheskoj psihologii: raboty sovetskikh psihologov perioda 1946–1980 godov* [Textbook on Age and Pedagogical Psychology: Works of Soviet Psychologists of the Period 1946–1980], ed. by I.I. Iljasov, V.Ja. Ljaudis. Moscow, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1981, pp. 97–101. (in Russ.)
8. Talyzina, N.F. Teorija pojetapnogo formirovaniya umstvennyh dejstvij [Theory of Step-By-Step Formation of Mental Actions]. In: *Teorii uchenija: hrestomatija: uchebnoe posobie* [Theories of Teaching: Textbook Manual], comp. by N.F. Talyzina, I.A. Volodarskaja. Moscow, Rossijskoe psihologicheskoe obshhestvo, 1996, pp. 98–137. (in Russ.)
9. Zhanje, P. *Psihologicheskaja jevoljucija lichnosti* [Psychological Evolution of Personality], transl. from French by N.Ju. Fedunina. Moscow, Akademicheskij Proekt, 2010, 399 p. (in Russ.)
10. Borovskikh, A.V., Verjovkina V.E. Predmetnye i metapredmetnye problemy shkol'nogo kursa matematiki. Tema Neravenstva [Disciplinary and Meta Disciplinary Problems of School Mathematics. The Topic “Inequalities”], *Nauka i shkola* = Science and School, 2015, No. 5, pp. 77–87. (in Russ.)
11. Makarenko, A.S. Pedagogicheskaja pojema [A Pedagogical Poem]. Moscow, ITRK, 2003, 736 p. (in Russ.)

Боровских Алексей Владиславович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, bor.bor@mail.ru

Alexey V. Borovskikh, ScD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor, Differential Equations Department, Lomonosov Moscow State University, bor.bor@mail.ru

Статья поступила в редакцию 06.02.2025. Принята к публикации 28.03.2025

The paper was submitted 06.02.2025. Accepted for publication 28.03.2025