УДК 372.851
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/2073-9613-2020-1-132-141

О ТРУДНОСТЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ, И ПУТЯХ ИХ ПРЕОДОЛЕНИЯ

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

Аннотация. *В статье описываются трудности, возникающие при изучении темы «Скрещивающиеся прямые» — одной из сложнейших в школьном курсе геометрии. Выявляются трудности исторического и методического характера. Приводится краткий исторический обзор, связанный с наличием понятий «расстояние» и «угол» между скрещивающимися прямыми в учебной литературе. Предлагаются пути преодоления выделенных трудностей, как при изучении стереометрии школьниками, так и при изучении геометрии будущими учителями математики.*

Ключевые слова: *школа, стереометрия, скрещивающиеся прямые, угол, расстояние.*

DIFFICULTIES THAT ARISE IN THE STUDY OF SKEW LINES IN SCHOOLS AND UNIVERSITIES, AND WAYS TO OVERCOME THEM

G.G. Yelchaninova, R.A. Melnikov

Abstract. *The article deals with the difficulties encountered in the study of the topic “Skew lines” — one of the most difficult in the school course of geometry. It identifies the challenges of historical and methodological nature. A brief historical review related to the presence of the concepts of «distance» and «angle» between skew lines in the educational literature is given. The ways of overcoming the highlighted difficulties, both in the study of solid geometry and in the study of geometry by future teachers of mathematics is given.*

Keywords: *school, solid geometry, skew lines, angle, distance.*

Геометрия как учебный предмет в школе давно и прочно заняла свое место. Элементы геометрии присутствуют даже в курсе математики начальной школы, а к систематическому изучению этого предмета в настоящее время обучающиеся приступают в 7 классе.

Бесспорно, геометрия вносит весомый вклад в разностороннее развитие личности обучающегося. К сожалению, это не совсем точно оценивается — прослеживается тенденция к занижению роли геометрии. Это выражается и в соотношении количества часов, отводимых на изучение (в классической школьной паре алгебра — геометрия), и в прерогативе школьного учителя, когда в ситуации выбора раздела для дополнительного занятия чаще предпочтение отдается алгебре.

Однако, по меткому выражению известного отечественного геометра, академика А.Д. Александрова — основателя петербургской геометрической школы: «геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга» [1, с. 56].

Изучение современного школьного курса геометрии разбивается на три логические ступени:

первая (5–6 классы) носит пропедевтический характер, в этот период происходит знакомство учащихся с некоторыми геометрическими объектами, их простейшими свойствами, иногда сопровождаемых доказательствами; изучение геометрии имеет преимущественно наглядный характер;

вторая (7–9 классы) заключается в систематическом построении планиметрии;

третья (10–11 классы) подразумевает систематическое изучение стереометрии, в большинстве случаев на основе системы аксиом.

Одним из основных, имеющих колоссальное теоретическое и прикладное значение, является вопрос, связанный с исследованием взаимного расположения прямых в пространстве.

Умение ориентироваться в случаях взаимного расположения геометрических объектов (двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей) является показателем *стереометрической грамотности* обучающегося.

Под ***стереометрической грамотностью*** мы понимаем видение взаимного расположения элементов фигур и самих фигур в пространстве, построение оптимального изображения необходимого ракурса и выносных чертежей, возможность изменения изображения для достижения поставленной цели.

Известно, что прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися. Изучение параллельных прямых происходит циклически, начинаясь еще в курсе планиметрии. Этапность соответствует ступеням изучения геометрии:

1. Подготовительный (пропедевтический) — 1–4 классы.
2. Регулярное изучение случаев расположения двух прямых на плоскости — 7–9 классы.
3. Систематическое изучение взаимного расположения двух прямых в пространстве — 10–11 класс.

Кроме того, изучение параллельных прямых в планиметрии происходит по схеме: дается определение параллельных прямых; рассматривается вопрос о существовании прямой, параллельной данной; изучаются приемы построения параллельных прямых; вводится аксиома параллельных (5-й постулат Евклида); изучаются свойства и признаки параллельных прямых; решение задач, связанных с отработкой навыков применения изученной теории.

Скрещивающиеся прямые так обстоятельно и систематически в школьном курсе не изучаются! Поэтому использование скрещивающихся прямых при решении задач и доказательстве теорем представляет проблему как для школьников, так и для студентов. Отмеченное неблагополучие является следствием целого комплекса причин.

В отличие от имеющей давние традиции в школьном обучении планиметрии, содержание раздела «Стереометрия» в отечественных школьных учебниках претерпело множество модификаций. Особенно это касается материала, связанного со скрещивающимися прямыми. Очевидный факт: материала о них вообще не было в содержании учебных пособий до определенного момента. Естественно, что такой исторический путь не содействовал лучшему изучению соответствующего материала.

Теоретические сведения, связанные с взаимным расположением прямых, в частности со случаем скрещивающихся прямых, в материале школьных учебников присутствовали не всегда. Так, для учебников и учебной литературы по геометрии конца XIX – начала XX в. характерно наличие четкой логической структуры, в которую входили основные неопределяемые понятия и система аксиом. Наиболее полную характеристику особенностей учебников этого периода, на наш взгляд, представила Т.С. Полякова: «Первая [особенность; авт.] — авторы наиболее оригинальных учебников геометрии уделяли исключительно большое внимание истории геометрии, которые излагались в отдельной главе (М.Е. Ващенко-Захарченко) или рассматривались на протяжении всего курса в качестве примечаний и приложений к главам. Вторая — стремление их авторов при соблюдении требования строгости, сделать изложение школьного курса геометрии более ясным для понимания учащимися.<…> Третья особенность большинства учебников этого периода — наличие в них так называемого общего отдела, содержащего наиболее интересные обобщающие задачи на вычисление и построение (А.Ю. Давидов). Наконец, четвертая особенность — единство стиля изложения первых разделов планиметрии и стереометрии без учета возрастных особенностей учеников. Если при изложении первых разделов планиметрии значительное место занимают интуиция и апелляция к опыту, то при изложении стереометрии в большей степени должна превалировать логика» [2, с. 439–440].

Особняком в учебной литературе этого периода стоит учебник «Элементарная геометрия» (1892) известного отечественного педагога-математика А.П. Киселева, автора «самого долгоиграющего» (26 изданий до революции и 16 изданий — после) школьного учебника геометрии. Если взять этот учебник за начало отсчета (при анализе наличия материала, связанного с понятием «скрещивающиеся прямые»), то мы можем констатировать, что в нем имелся материал, связанный со скрещивающимися прямыми: автор рассматривает только вопрос о нахождении угла между двумя скрещивающимися прямыми. Основной акцент в содержании этого учебника сделан на изучении многогранников и круглых тел. Их изучению отводится около 60% теоретического материала учебника.

В первые годы советской власти весьма популярным был учебник «Геометрия в пространстве» (Стереометрия) Н.А. Извольского (1870–1938), первое издание которого вышло в 1913 г. Оглавление этой книги разделено на две части, но ни в одной из них нет параграфа, посвященного скрещивающимся прямым. В главе «Параллельность в пространстве», автор лишь говорит: «Если две прямые не пересекаются и не параллельны, то мы их будем называть прямыми, не лежащими в одной плоскости» [3, с. 5].

Все это не случайно, так как в то время на содержание школьной стереометрии, существовали разные точки зрения, порой, весьма экзотические. Например, в пособии «Геометрия пространства» (1910), автором которого являлся малоизвестный учитель Б.А. Маркович (1853–1915) — сын писательницы Марко-Вовчок, во главу угла ставилось применение движения для доказательства основных теорем стереометрии. Сторонником такого подхода был Н.М. Душин (1885–1930) — профессор Харьковского химико-технологического института. В 1923 г. он издал «Курс элементарной геометрии», в котором продвигал идею фузионизма в изложении планиметрии и стереометрии, основанный на идее движения.

Лишь в методическом пособии [4], авторами которого являются советские педагоги-математики Р.В. Гангнус (1883–1949) и Ю.О. Гурвиц (1882–1953), мы находим параграф «Скрещивающиеся прямые и их основные свойства», в котором излагается материал, максимально близкий к современному. Но судьба этой книги трагична, она получила разгромные рецензии и была выведена из использования в обучении геометрии.

Смоленский методист И.С. Альтшулер, активно публиковавшийся после Великой Отечественной войны, центром тяжести стереометрии считал пространственные суждения. По его мнению, центральное место в стереометрии должно отводится изучению взаимоотношений между основными геометрическими объектами: точками, прямыми и плоскостями. Вычисление поверхностей и объемов он считал относящимся к алгебре (это шло вразрез с концепцией А.П. Киселева).

Итак, первая выделенная нами причина неблагополучия — историческая, но мы полагаем, что не только она влияет на затруднения при изучении материала, связанного со скрещивающимися прямыми.

Вторая проблема — методическая. Систематизируем методические трудности, характерные для изучения скрещивающихся прямых:

1) видение пары скрещивающихся прямых,

2) осуществление параллельного переноса одной из пары скрещивающихся прямых,

3) построение угла между скрещивающимися прямыми,

4) нахождение угла между скрещивающимися прямыми,

5) показ расстояния между скрещивающимися прямыми,

6) нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми,

7) в случае невозможности визуализации искомого расстояния — альтернативное решение векторно-координатным способом.

Изучение скрещивающихся прямых связано с упомянутым выше учением о параллельности. Так, определение угла между двумя скрещивающимися прямыми дается в настоящее время после определения углов с соответственно параллельными сторонами. Кроме того, возможно нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми как расстояния между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

Методические затруднения наблюдаются и при введении понятия угла между скрещивающимися прямыми. Где и как вводить это понятие? Угол между скрещивающимися прямыми — это не угол в том смысле, который ранее уяснил ученик. Это не геометрическая фигура, а некая величина. Такое понимание угла дается в начале 10 класса. Оно трудно для усвоения и, возможно, несвоевременно, так как уводит ученика в область чисел от геометрии. Поэтому методисты советуют пожертвовать простотой в доказательстве теорем и решении задач, но сохранить «геометричность», возможность обращения к пространственному представлению и мышлению. Этой точки зрения придерживается авторский коллектив учебника [5] под ред. А.Д. Александрова. Но из-за этого доказательства теорем и решения некоторых задач становятся громоздкими.

Если понятие угла между скрещивающимися прямыми вводить до перпендикулярности прямых и плоскостей, то легче и проще, короче доказываются теоремы, решаются задачи. Теория сразу получается логически более общей и нет необходимости в дальнейшем переучивать (сначала говорят «пусть прямая a перпендикулярна плоскости α, A — точка их пересечения, прямая b принадлежит этой плоскости и не проходит через точку A, тогда прямая b не перпендикулярна плоскости α. Далее, при тех же условиях утверждают обратное, а именно, что b перпендикулярна плоскости α»). Ситуация напоминает решение квадратных уравнений, когда сначала говорят, что при условии отрицательности дискриминанта уравнение корней не имеет, а при изучении комплексных чисел, при том же условии, наложенном на дискриминант, утверждают, что корни есть.

Опыт преподавания показывает удобство компромиссного варианта, когда понятие угла между скрещивающимися прямыми вводится после рассмотрения факта о том, что две прямые, соответственно параллельные двум перпендикулярным прямым, перпендикулярны друг другу. И на основе понятия перпендикулярных скрещивающихся прямых проще доказываются теоремы и нет необходимости говорить об угле между лучами.

При нахождении угла между скрещивающимися прямыми можно использовать следующие способы:

1) проектирование скрещивающихся прямых, между которыми ищется угол, на плоскость, которой перпендикулярна одна из этих прямых с последующим нахождением синуса искомого угла;

2) проектирование отрезка одной из скрещивающихся прямых на другую с последующим нахождением косинуса искомого угла;

3) параллельный перенос одной из скрещивающихся прямых до положения пересечения с второй из них;

4) векторно-координатный способ, причем могут использоваться разные его подвиды: векторный, координатный, с использованием направляющих косинусов;

5) способ, достаточно редко, но эффективно используемый — с помощью тетраэдра (ищут значения длин шести расстояний между четырьмя точками, которые рассматриваются в качестве вершин тетраэдра);

6) способ нахождения угла, при реализации которого используется расстояние между скрещивающимися прямыми с использование достаточно редко применяемой формулы для вычисления объема тетраэдр: $6V = a \cdot b \cdot h \cdot sin\varphi$, где a и b — длины скрещивающихся ребер тетраэдра, h — расстояние между ними, — искомый угол.

Все это относится к школе, что касается вуза — имеется возможность решить любую из перечисленных задач-проблем средствами аналитической геометрии, используя понятия смешанного и векторного произведения векторов.

Не меньше проблем с введением понятия «расстояние между скрещивающимися прямыми» и решением задач, связанных с его поиском.

Анализ школьных учебников разных периодов показал, что подавляющее большинство авторов ограничивается лишь констатацией определения понятия «расстояние между скрещивающимися прямыми». При этом можно отметить две тенденции.

Во-первых, это понятие дается как их общий перпендикуляр. Этот факт роднит большинство учебных пособий.

Во-вторых, поясняется, между какими геометрическими объектами следует искать этот общий перпендикуляр. А в этом месте происходит расхождение методических точек зрения у авторов и авторских коллективов.

Некоторые авторы (З.А. Скопец и др. [6]; А.Ю. Калинин и Д.А. Терешин [7]; И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [8]; В.А. Гусев [9] и др.) стоят на позициях, что это собственно общий перпендикуляр между двумя этими прямыми. Для них характерно определение типа: «отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся прямых и перпендикулярный этим прямым, называется их общим перпендикуляром. Длина общего перпендикуляра называется расстоянием между скрещивающимися прямыми».

Следует отметить, что в учебнике под редакцией З.А. Скопеца делается замечание, уточняющее, что длина этого перпендикуляра равна расстоянию между параллельными плоскостями, их содержащими.

Другие (А.В. Погорелов [10]; А.Д. Александров и др. [5]; Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич [11]) сразу склоняются к тому, что это расстояние следует искать как расстояние между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит по одной из скрещивающихся прямых.

Имеются и другие точки зрения. Например, И.Ф. Шарыгин [12] понимает это расстояние как расстояние от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость до проекции другой прямой на эту же плоскость.

В учебнике под редакцией Л.С. Атанасяна [13] мы находим еще одно определение, отличное от всех предыдущих: «это расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой».

Последнее определение, на наш взгляд, особенно удачное, так как наиболее логично позволяет свести задачу о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми к задаче о поиске расстояния от точки (удачно выбранной на одной из скрещивающихся прямых) до плоскости (содержащей вторую из скрещивающихся прямых). При этом открываются заманчивые перспективы использования формулы для вычисления расстояния от точки до плоскости, хорошо известной из курса аналитической геометрии, т.е. появляется возможность применения координатного метода.

Задача о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми является одной из труднейших задач школьного курса геометрии. Это в определенной мере объясняет тот факт, что ее часто включают в содержание олимпиадных задач по математике разного уровня. Кроме того, время от времени эта задача появляется в содержании контрольно-измерительных материалов профильного ЕГЭ по математике.

Между тем, нахождение упомянутого расстояния между скрещивающимися прямыми школьниками не может быть успешным, если сам учитель испытывает затруднения при решении соответствующих задач. Учитель — это бывший студент. Мы считаем, что еще со студенческой скамьи он должен иметь достаточный опыт работы со скрещивающимися прямыми. А для этого методика изучения должна способствовать систематизированной, осмысленной, иногда и алгоритмизированной работе по поиску скрещивающихся прямых, изображению параллельных им прямых и нахождению расстояний и углов между ними.

Отечественный методист М. Крайзман (1919–1996), часто публиковавшийся на страницах журнала «Квант», заметил: «При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая: 1) скрещивающиеся прямые перпендикулярны; 2) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны» [14, с. 13]. Благодаря такому подходу, как бы перекидывается своеобразный мостик, связывающий вопросы о поиске угла между скрещивающимися прямыми и о вычисления расстояния между ними.

Важным методическим аспектом изучения темы «Расстояние между скрещивающимися прямыми» (на этапе перехода от рассмотрения теории к решению конкретных задач) является выбор геометрического тела, на котором «размещаются» скрещивающиеся прямые.

Очевидно, что самой простейшей ситуацией, позволяющей доступно показать соответствующие способы решения задачи, являются скрещивающиеся прямые, лежащие на ребрах куба. Подготовительным этапом является устное решение задач (например, назвать пары скрещивающихся прямых) на чертеже. Далее следует перейти к рассмотрению задач (содержащих частный случай), т.е. в которых одна из скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости, содержащей вторую прямую. Тут следует учитывать, что имеет место теорема о трех перпендикулярах. Другими словами, проекция наклонной, концы которой лежат на двух скрещивающихся прямых, будет обязательно перпендикулярна каждой из них, если одна из них лежит на перпендикуляре, а вторая проходит перпендикулярно наклонной.

Только после этого следует переходить к изучению ситуации, когда скрещивающиеся прямые не образуют прямого угла. Для этого случая имеется пошаговый алгоритм, предложенный известным методистом В.С. Крамором [15, с. 162].

Здесь в качестве «геометрического остова», на котором располагаются скрещивающиеся прямые, могут использоваться уже и такие тела, как пирамида, усеченная пирамида и др.

Основными способами решения задачи о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми являются: *аналитический метод* (как правило, состоящий в построении общего перпендикуляра, обосновании его существования и поиске его длины); *метод координат*; *метод объемов*.

При изучении скрещивающихся прямых в вузе, на наш взгляд, следует сместить акцент на применение векторно-координатного метода. Не лишним окажется и рассмотрение теоремы: «Объем треугольной пирамиды равен одной шестой произведения длин двух любых ее скрещивающихся ребер на расстояние между ними и на синус угла между ними» [16, с. 55]. Она интересна тем, что, во-первых, не упоминается ни в одном школьном учебнике, а во-вторых, связывает два ключевых понятия «расстояние» и «угол» между скрещивающимися прямыми.

Ясно, что каждый из этих методов имеет различную вычислительную сущность (т.е. количество выкладок может существенно различаться, объем самого решения (текста) может различаться весьма существенно, а также важен фактор затраченного на получение ответа времени).

Для разрешения обозначенных проблем и организации курсового изучения скрещивающихся прямых, очевидно, возможно использование двух путей:

1) изменение методики изучения скрещивающихся прямых и всего круга теории, с ними связанной;

2) изменение организации подачи материала.

В зависимости от того, каким учебником пользуется школьный учитель математики, он автоматически ориентирует обучающихся на один из этих подходов. Как правило, альтернативные подходы остаются вне поля зрения учащихся.

В этом и состоит основная методическая проблема изучения скрещивающихся прямых — привязанность к одной из трактовок понятия расстояния между скрещивающимися прямыми. Поэтому в процессе обучения будущих учителей математики (при изучении дисциплин «Элементарная математика с практикумом по решению задач», «Методика обучения математике» и «Изучение школьных учебников математики») преподавателями вузов должен быть представлен весь спектр имеющихся на этот вопрос воззрений. Дело в том, что в зависимости от выбранного подхода далее подбирается способ решения соответствующей задачи.

Не является новостью и тот факт, что в последнее время на направления обучения, где основой являются естественнонаучные, в частности, математические знания, приходят абитуриенты, стереометрическая грамотность которых не только оставляет желать лучшего, но и практически не развита. В условиях обучения таких студентов необходимо предложить курс, отвечающий, как потребностям в начальных сведениях, на которых она основана, так и развивающий уже имеющуюся стереометрическую грамотность. Мы не имеем в виду отдельный вузовский курс, это невозможно в условиях сжатого донельзя времени на изучение основных дисциплин. Под курсом мы в данном случае понимаем систематическое изучение взаимного расположения фигур и их элементов в пространстве при рассмотрении вопросов стереометрии в рамках подходящего основного вузовского курса. В частности, это может быть элементарная математика с практикумом по решению задач, методика обучения математике и другие курсы.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров, А.Д.* О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.
2. *Полякова, Т.С.* История математического образования в России. М.: Издательство МГУ, 2002. 624 с.
3. *Извольский, Н.А.* Геометрия в пространстве (Стереометрия). 4-е. изд. Л.: Типография имени Н. Бухарина, 1924. 141 с.
4. *Гангнус, Р.В., Гурвиц, Ю.О.* Геометрия: методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. Часть вторая «Стереометрия» / под ред. И.К. Андронова. М.: ГУПИ, 1935. 328 с.
5. *Александров, А.Д., Вернер А.Л., Рыжик, В.И.* Геометрия: учебник для учащихся 10 классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1999. 238 с.
6. Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / под редакцией З.А. Скопеца. 4-е изд. М.: Просвещение, 1978. 144 с.
7. *Калинин, А.Ю., Трешин Д.А.* Геометрия. 10-11 классы. Новое изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2011. 640 с.
8. *Смирнова, И.М., Смирнов, В.А.* Геометрия 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 5-е изд., испр. и доп. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.
9. *Гусев, В.А., Куланин, Е.Д., Мякишев, А.Г.* Геометрия. Профильный уровень: учебник для 10 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 311 с.
10. *Погорелов, А.В.* Геометрия: учебник для 7–11 классов общеобразовательных учреждений. 5-е изд. М.: Просвещение, 1995. 338 с.
11. *Потоскуев, Е.В., Звавич, Л.И.* Геометрия 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2008. 223 с.
12. *Шарыгин, И.Ф.* Геометрия 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учебных заведений. М.: Дрофа, 1999. 208 с.
13. *Атанасян, Л.С., Бутузов, В.Ф., Кадомцев, С.Б.* Геометрия: учебник для 10–11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992. 207 с.
14. *Крайзман, М.Л.* Расстояние между скрещивающимися прямыми // Практикум абитуриента: Геометрия. Вып. 3 / под ред. А.А. Егорова. М.: Бюро Квантум, 1996. 128 с.
15. *Крамор, В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. 4-е изд. М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство Оникс», 2011. 336 с.
16. *Крайзман, М.Л.* Расстояние между скрещивающимися прямыми // Квант. 1972. № 11. С. 52–57.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.D. O geometrii, *Matematika v shkole*, 1980. No. 3, pp. 56–62. (in Russian).
2. Polyakova T.S. *Istoriya matematicheskogo obrazovaniya v Rossii*. Moscow, Izdatelstvo MGU, 2002, 624 p. (in Russian).
3. Izvolskij N.A. *Geometriya v prostranstve (Stereometriya)*, 4-e. izd. Leningrad, Tipografiya imeni N. Buharina, 1924, 141 p. (in Russian).
4. Gangnus R.V., Gurvic Yu.O. *Geometriya: metodicheskoe posobie dlya vysshih pedagogiche-skih uchebnyh zavedenij i prepodavatelej srednej shkoly*. *Chast vtoraya "Stereometriya",* Pod red. I.K. Andronova. Moscow, GUPI, 1935, 328 p. (in Russian).
5. Aleksandrov A.D. Verner A.L., Ryzhik V.I. *Geometriya: uchebnik dlya uchashchihsya 10 klassov s uglublennym izucheniem matematiki*, Moscow, Prosveshchenie, 1999, 238 p. (in Russian).
6. *Geometriya. Uchebnoe posobie dlya 9 i 10 klassov srednej shkoly*, ed. Z.A. Skopeca, 4-e izd. Moscow, Prosveshchenie, 1978, 144 p. (in Russian).
7. Kalinin A.Yu., Teryoshin D.A. *Geometriya. 10-11 klassy.* Novoe izd., ispr. i dop. Moscow, MCNMO, 2011, 640 p. (in Russian).
8. Smirnova I.M., Smirnov V.A. *Geometriya 10-11 klassy: uchebnik dlya uchashchihsya obshcheobrazovatelnyh uchrezhdenij,* 5-e izd., ispr. i dop. Moscow, Mnemozina, 2008, 288 p. (in Russian)
9. Gusev V.A., Kulanin E.D., Myakishev A.G. *Geometriya. Profilnyj uroven: uchebnik dlya 10 klassa.* Moscow, BINOM, Laboratoriya znanij, 2010, 311 p. (in Russian).
10. Pogorelov A.V. *Geometriya: uchebnik dlya 7–11 klassov obshcheobrazovatelnyh uchrezhde-nij,* 5-e izd. Moscow, Prosveshchenie, 1995, 338 p. (in Russian).
11. Potoskuev E.V., Zvavich L.I. *Geometriya 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatelnyh uchrezhdenij s uglublennym i profilnym izucheniem matematiki*. 6-e izd., stereotip. Moscow, Drofa, 2008, 223 p. (in Russian).
12. Sharygin I.F. Geometriya 10-11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatelnyh uchebnyh zavedenij. Moscow, Drofa, 1999, 208 p. (in Russian).
13. Atanasyan L.S., Butuzov V.F., Kadomcev S.B. *Geometriya: uchebnik dlya 10–11 klassov srednej shkoly*. Moscow, Prosveshchenie, 1992, 207 p. (in Russian).
14. Krajzman M.L. Rasstoyanie mezhdu skreshchivayushchimisya pryamymi, *Praktikum abitu-rienta: Geometriya. Vypusk 3,* ed. A.A. Egorova. Moscow, Byuro Kvantum, 1996, 128 p. (in Russian).
15. Kramor V.S. *Povtoryaem i sistematiziruem shkolnyj kurs geometrii*, 4-e izd. Moscow, Izdatelstvo "Mir i obrazovanie", "Izdatelstvo Astrel", "Izdatelstvo Oniks", 2011, 336 p. (in Russian).
16. Krajzman M.L. Rasstoyanie mezhdu skreshchivayushchimisya pryamymi. 1972, No. 11, pp. 52–57. (in Russian).

Ельчанинова Галина Георгиевна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и методики ее преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, eltchaninova_gg@mail.ru

Elchaninova G.G., PhD in Education, Associate Professor, Associate Professor, Mathematics and Its Teaching Methods Department, Bunin Yelets State University, eltchaninova_gg@mail.ru

Мельников Роман Анатольевич, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и методики ее преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, roman_elets_08@mail.ru

Melnikov R.A., PhD in Education, Associate Professor, Mathematics and Its Teaching Methods Department, Bunin Yelets State University, roman_elets_08@mail.ru