УДК 517.1
ББК 22.161

ХАРАКТЕРНЫЕ ОШИБКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛЫ»

Г.Е. Полехина

Аннотация. *Материалом для написания статьи послужили контрольные работы студентов и домашние задания по математике. Анализ и систематизация информации, полученной в процессе исследования, показали, что большая часть ошибок связана с формализмом в знаниях учащихся. В статье рассмотрены наиболее часто встречающиеся ошибки при решении задач, вскрываются причины их появления, приводятся правильные решения. Автор приходит к выводу, что с типичными ошибками должна проводиться фронтальная работа, со случайными — индивидуальная. Любая ошибка должна быть использована для более детального и глубокого проникновения в суть каждого правила, понятия, теоремы и т.д.*

Ключевые слова: *ошибки, пределы, неопределенность, эквивалентные, бесконечно большие, бесконечно малые, первый замечательный предел, второй замечательный предел, функция, правило Лопиталя.*

TYPICAL ERRORS IN SOLVING THE PROBLEMS ON THE TOPIC "LIMITS"

G.E. Polehina

Abstract. *The material for writing the article was the test papers of students and homework in mathematics. Analysis and systematization of information obtained in the process of research showed that most of the errors are associated with formalism in students' knowledge. The article considers the most common errors in solving problems, reveals the reasons for their appearance, provides the correct solutions. The author comes to the conclusion that frontal work should be carried out with typical mistakes, individual work with random errors. Any mistake should be used for more detailed and deep insights into the essence of each rule, concept, theorem, etc.*

Keywords: *Errors, limits, uncertainty, equivalent, infinitely large, infinitely small, the first remarkable limit, the second remarkable limit, the function, L'Hôpital's rule.*

Опыт проведения практических занятий, приема экзаменов, проверки контрольных работ показывает, что многие ошибки носят систематический характер. Часто задачи решаются нерационально. При демонстрации ошибок, как правило, вскрываются причины их появления и наряду с ошибочными решениями задач приводятся правильные. Это главным образом относится к наиболее распространенным ошибкам.

При нахождении пределов допускается много ошибок. Понятие предела является очень важным. С помощью предела формулируется много понятий математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений). Студент должен знать определение предела, теоремы о пределах. Но этого недостаточно. Дело в том, что вообще задача нахождения предела функции является достаточно трудной. Ее решение требует от студента знаний не только по теории пределов, но и по элементарной математике.

В методике преподавания математики одно из центральных мест занимают методы обучения, знание которых необходимо для организации эффективного обучения студентов. Среди них можно выделить эмпирические, логические, математические. В первую очередь, работа по математическому описанию реальных ситуаций выполняется с помощью эмпирических методов. «К эмпирическим методам познания относятся наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Для математики эти методы не являются характерными. Математика не является экспериментальной наукой, и, следовательно, опытное подтверждение не может служить достаточным основанием истинности ее предложений. Это, несомненно, верно, если под математикой понимать совокупность готовых, уже построенных дедуктивных теорий, но это неверно, если под математикой понимать мыслительную деятельность, результатом которой являются подобные теории. В последнем случае дедуктивная теория лишь одна фаза математики. Но она имеет еще две фазы – предшествующую дедуктивной теории фазу накопления фактов (опытную, интуитивную) и следующую за ней фазу приложений. Эти две фазы не менее важны в обучении, чем сама дедуктивная теория: первая – для понимания этой теории, вторая — для ее оправдания [1]». Получаемый в процессе применения эмпирических методов математический материал подлежит дальнейшей обработке уже другими методами.

Рассмотрим это на примере решения задач по теме «Пределы».

Прежде всего, при их решении задач на пределы студенту полезно помнить таблицу простейших пределов.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C}{x}=\infty.$	3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{C}=\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}Cx=\infty.$	4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{C}{x}=0.$	6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=\infty.$

В таблице $C \neq 0$.

Надо помнить, что непосредственная подстановка предельного значения аргумента в функцию может привести к одной из неопределенностей вида

$(\infty-\infty)$ при бесконечно больших функциях одного знака, $\frac{(\infty)}{(\infty)}$, $\frac{(0)}{(0)}$, $(0)\cdot(\infty)$, $(1)^{(\infty)}$, $(0)^{(0)}$, $(\infty)^{(0)}$.

Студенты должны раскрывать эти неопределенности, но умения им часто не хватает.

Рассмотрим примеры:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-4}{x^5+x^3+2x+1}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^5}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=0.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\frac{x+2-4}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2}(x-\sqrt{x^2+3x})=\frac{(x-\sqrt{x^2+3x})(x+\sqrt{x^2+3x})}{x+\sqrt{x^2+3x}}=\frac{x^2-x^2-3x}{x+\sqrt{x^2+3x}}=\frac{-3x}{x+\sqrt{x^2+3x}}=\frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-\frac{3}{2}.$$

Ответы получены правильные, но решения были выполнены без понимания существа предельного перехода. Знак предела всюду опущен.

При решении третьего примера студенты часто допускают ошибку: делят функцию под знаком предела на x в наивысшей степени, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)=0\,.$$

Между тем, делить на x нельзя, т.к. получаем функцию, не равную данной.

Некоторые символ ∞ (бесконечность), являющийся обозначением бесконечно большой величины, считают числом, что приводит к грубым ошибкам при нахождении пределов функции.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x})=\infty-\infty=0\,.$$

Неверно. Решающие посчитали бесконечность числом и применили к ней правила действий над числами.

Далее, деление числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень независимой переменной x, применяемый при раскрытии неопределенности вида $\frac{(\infty)}{(\infty)}$, ошибочно используется для нахождения пределов функций, не приводящих к данной неопределенности.

Найдите

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\frac{1+2-3}{1-3+2}=\frac{0}{0}\,.$$

Продолжения решения не последовало. Надо было решать иначе:

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь:

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2};$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=\frac{8}{-1}=-8.$$

Если требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, то такую дробь всегда можно сократить на $x-a$.

При применении первого и второго замечательных пределов к отысканию пределов функций допускаются серьезные ошибки или упомянутые пределы не используются.

В подтверждение сказанного приведем примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=e.$$

Пределы найдены неверно. Чтобы избежать ошибок при использовании замечательных пределов (первого и второго), лучше эти пределы помнить в виде:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin v}{v}=1,$$

если $v\to 0$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e,$$

если $v\to 0$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v=e,$$

если $v\to\infty$ при $x\to\infty$.

В этих пределах v-функция независимой переменной x.

Теперь мы можем правильно найти пределы в приведенных выше примерах:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{(-2)\frac{x}{-2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=\left[\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^5=e^5.$$

Полезно знать пределы:

$$\lim_{x\to 0}(1+kv)^{\frac{1}{v}}=e^k,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{v}\right)^v=e^k,$$

где k = const.

С помощью этих пределов в примерах мы могли бы сразу записать ответы. Рассмотрим еще пример.

Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{7x}.$$

Многие студенты не справились с решением этой задачи. Предел следовало находить так:

Введем новую переменную $\arcsin 3x = z$, отсюда $\sin z = 3x$,

$$x=\frac{1}{3}\sin z.$$

Очевидно, если $x\to 0$, то и $z\to 0$.

Теперь можем написать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{7x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{7\cdot\frac{\sin z}{3}}=\frac{3}{7}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\sin z}{z}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{7}.$$

Какие бесконечно малые величины называются эквивалентными, обычно студенты знают. Важно также знать, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить эквивалентной.

Тот факт, что величины α и β эквивалентны, записывают: $\alpha\sim\beta$.

Полезно запомнить таблицу: при $x\to 0$

1) $\sin x\sim x$,

2) $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$,

3) $\ln(1+x)\sim x$,

4) $\log_a(1+x)\sim x\log_a x$,

5) $\arcsin x\sim x$,

6) $arctgx\sim x$,

7) $tgx\sim x$,

8) $a^x\sim 1+a\ln x$,

9) $e^x\sim 1+x$,

10) $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha\cdot x$.

Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{7x}.$$

Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{7x}=\frac{3}{7}.$$

При применении правила Лопиталя имеют место существенные недостатки.

На практике часто, когда находится предел дроби, вместо того, чтобы находить производные от числителя и знаменателя отдельно, находят производную от дроби.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Некоторые решение выполнили так:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+2)\cdot(x-1)-(x^2+2x-3)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

и т.д.

Предел остался не найденным, а он существует и находится очень просто:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+2}{1}=4.$$

Забывают, что если дифференцирование числителя и знаменателя не облегчает нахождение предела дроби, необходимо все же попытаться отыскать предел другими известными способами.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Студенты применили правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Сделали заключение — предел не существует, а в действительности это не так. Покажем это:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1}=1.$$

Нетвердое знание существующих неопределенностей в математике приводит к тому, что правило Лопиталя применяется к отношениям бесконечно малой к бесконечно большой и бесконечно большой к бесконечно малой.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{ctgx}$.

Здесь правило Лопиталя применять нельзя, так как числитель при $x = 0$ обращается в 0, а знаменатель дроби – в ∞.

Искомый предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{ctgx}=\frac{0}{\infty}=0.$$

Нередко забывают, что правило Лопиталя иногда выгодно применять в сочетании с другими приемами нахождения пределов функций. В частности, бывает полезно использовать замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}-3x^2}{6\sin^5 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{x^3}-1)}{4\sin^5 2x\cdot\cos 2x}.$$

Можно снова применить правило Лопиталя, но замечаем, что от его применения функция, от которой находится предел, не улучшится, а поэтому поступаем иначе.

Зная, что разность $e^{x^3}-1$ эквивалентна x^3, а функция $\sin^5 2x$ эквивалентна $(2x)^5$, когда $x\to 0$, последний предел перепишем в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{x^3}-1)}{4\sin^5 2x\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^3}{4\cdot 32x^5\cdot\cos 2x}=\frac{1}{128}.$$

Большая группа студентов пыталась найти предел только с помощью правила Лопиталя, однако результат не был получен.

Много различных ошибок допускается при раскрытии неопределенностей вида $1^\infty, 0^0, \infty^0$. В этой связи приведем решения некоторых примеров.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

Неопределенность вида 1^∞.

Обозначим данную функцию через у и прологарифмируем:

$y=(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}, \ln y=\dfrac{\ln(1+\sin x)}{2x}$. Находим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}=\frac{1}{2}, \lim_{x\to 0}y=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{tgx}$.

Неопределенность вида 0^0.

$y=x^{tgx}, \ln y=tgx\cdot\ln x.$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}tgx\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{tgx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.$$

$\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1.$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^x$.

Неопределенность вида ∞^0.

$y=(ctgx)^x, \ln y=x\ln ctgx$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln ctgx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot tgx}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot tgx}{x^2}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1.$

Таким образом, в статье рассмотрены некоторые типичные ошибки, допускаемые учащимися при изучении темы «Пределы», их объяснение, меры их предупреждения. Хорошо организованная преподавателем работа учащихся над типичными ошибками приводит к улучшению результата обучению математики и развитию ряда показателей логического мышления. Помня слова А. Нивена о том, что «Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед», можно сделать вывод о том, что необходима дидактически верно организованная самостоятельная работа студентов по изучению математики.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бермант, А.Ф.* Краткий курс математического анализа: уч. пособие [Текст] / А.Ф. Бермант. — СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. — 736 с.
2. *Шипачев, В.С.* Высшая математика: учебник для вузов [Текст] / В.С. Шипачев. — М.: Высшая школа, 2008. — 479 с.

REFERENCES

1. Bermant A.F., *Kratkij kurs matematicheskogo analiza: uchebnoje posobie,* Sankt-Petersburg, Moscow, Krasnodar, Lan, 2010, 736 p. (in Russian)
2. Shipachev V.S., *Vyshaya matematika, uchebnik dlya vuzov,* Moscow, Vyshaya shkola, 2008, 479 p. (in Russian)

Полехина Галина Евгеньевна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра прикладной механики и математики, Научно-исследовательский университет «Московский государственный строительный университет», филиал в г. Мытищи, polekhina_ge@mail.ru

Polehina G.Eu., PhD in Pedagogy, Associate Professor, Applied Mechanics and Mathematics Department, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Mytishchi Branch, polekhina_ge@mail.ru