УДК 378.1
ББК 74.48

DOI: 10.31862/2073-9613-2021-4-171-183

ВОПРОСЫ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К ОРГАНИЗАЦИИ ОЛИМПИАД ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Е.И. Деза, А.Н. Попов

Аннотация. *В статье обобщен опыт авторов по подготовке учителя математики к организации и проведению математических олимпиад для школьников. Дан обзор истории и современного состояния олимпиадного движения в России. Проанализированы различные возможности реализации такой подготовки с учетом реалий современного состояния образовательной системы Российской Федерации. Рассмотрены методические особенности обучения студентов-магистрантов института математики и информатики Московского педагогического государственного университета решению и составлению олимпиадных задач арифметической и дискретной тематики для школьников. Приведены многочисленные примеры реализации предложенного авторами подхода «решение задач — тиражирование задач», обоснована методическая целесообразность его использования в образовательном процессе. Продемонстрированы задачи олимпиадного типа, рассматриваемые в ходе проведения на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова семинаров для учителей, участвующих в московском городском проекте «Математическая вертикаль». Предложены возможные направления дальнейших исследований.*

Ключевые слова*: методическая подготовка учителя математики, проект «Математическая вертикаль», математические олимпиады для школьников, арифметика, теория графов.*

Для цитирования: *Деза Е.И., Попов А.Н.* Вопросы подготовки учителей математики к организации олимпиад для школьников // Преподаватель XXI век. 2021. № 4. Часть 1. С. 171–183. DOI: 10.31862/2073-9613-2021-4-171-183

TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS TO ORGANIZE OLYMPIADS FOR SCHOOLCHILDREN

E.I. Deza, A.N. Popov

Abstract. *The article summarizes the authors' experience in training mathematics teachers to organize and conduct mathematical Olympiads for schoolchildren. A review of the history and current state of the Olympiad movement in Russia is given. Various opportunities for implementing such training taking into account the realities of the current state of the educational system of the Russian Federation are analyzed. The article considers the methodological features of training master's students of the Institute of Mathematics and Informatics of Moscow Pedagogical State University in solving and formulating the Olympiad problems of arithmetic and discrete subjects for* *schoolchildren. Numerous examples of implementing the “solving problems — replicating problems” approach suggested by the authors are presented, and the methodological expediency of its use in the educational process is substantiated. Olympiad-type problems considered at the seminars held on the basis of the Lomonosov Moscow State University for the teachers participating in the Moscow city project “Mathematical Vertical” are demonstrated. Possible directions for further research are suggested.*

Keywords: *methodological preparation of mathematics’ teachers, project “Mathematical Vertical”, mathematical Olympiads for schoolchildren, Arithmetic, Graph Theory.*

Cite as: Deza E.I., Popov A.N. Training of Mathematics Teachers to Organize Olympiads for Schoolchildren. *Prepodavatel XXI vek*. Russian Journal of Education, 2021, No. 4, part 1, pp. 171–183. DOI: 10.31862/2073-9613-2021-4-171-183

Олимпиадное движение в России: история и современность

Олимпиадное движение в России имеет глубокие корни, долгую и богатую историю и отмечено значительными достижениями, в том числе на международной арене. В советское время олимпиады были направлены, прежде всего, на выявление талантливой молодежи, повышение мотивации обучающихся к углубленному овладению тем или иным предметом, в том числе (и прежде всего) математикой, на повышение престижа отечественной науки и образования на уровне мирового сообщества [1].

В настоящее время олимпиады того или иного уровня продолжают играть существенную роль в системе качественной общеобразовательной подготовки современной молодежи. В свете реалий сегодняшнего дня олимпиады хороши не только как творческие соревнования школьников по соответствующему учебному предмету, но и весьма полезны при проведении тех или иных отборочных мероприятий [там же].

В этой связи нельзя не вспомнить о городском образовательном проекте «Математическая вертикаль», охватывающем сегодня учащихся 7–9 классов, которых обучают в рамках проекта на уровне, необходимом для дальнейшей профильной специализации, для плодотворного использования математики в жизни и в профессии. Как поступление, так и обучение в классах проекта предусматривает, в том числе, участие в тех или иных олимпиадах. А среди показателей успешности результатов обучения (помимо сдачи ОГЭ на высоком уровне и прохождения специализированных диагностик после 7-го и 8-го классов) выделено успешное выступление на муниципальном этапе всероссийской олимпиады школьников [2].

Кроме того, сегодня победа на олимпиадах соответствующего уровня обеспечивает льготы при поступлении в высшие учебные заведения России. Так, еще учась в девятом классе, можно поступить без экзаменов в Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; для этого нужно «всего лишь» стать призёром или победителем по соответствующему профилю заключительного этапа Всероссийской олимпиады. Значительные льготы при поступлении в вуз дает успешное участие в таких олимпиадах школьников, как «Покори Воробьёвы горы», «Ломоносов», «Высшая проба», «Физтех» и многие другие [3]. В современных реалиях мотивация такого рода весьма существенна для обучающихся и их родителей. Число желающих выступить на олимпиадах для получения льгот при поступлении в вуз неуклонно повышается. Следовательно, растет число школьников, получающих углубленную подготовку в избранной области. Это в любом случае полезно как для каждого обучающегося, так и для государства в целом [там же].

Подготовка к олимпиадам: проблема педагогических кадров. В связи с этим возникает потребность в специалистах, которые могут на высоком профессиональном уровне подготовить широкий круг школьников к участию в олимпиадах, по крайне мере школьного и муниципального уровней [4].

Конечно, в первую очередь речь идет о соответствующем обучении магистров педагогического образования, и, как показывает анализ нормативных документов, многие современные магистерские программы учитывают эту тенденцию [5; 6]. Так, в учебных планах подготовки магистров по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование» (магистерская программа «Математика и информационные технологии») института математики и информатики Московского педагогического государственного университета (МПГУ) присутствуют дисциплины по выбору «Олимпиадные задачи по арифметике» и «Нестандартные и исследовательские задачи по математике». Магистерская программа «Информатика в общем и дополнительном образовании» того же института предлагает обучающимся курс по выбору «Олимпиадные задачи по теории графов». Можно привести и ряд других примеров [7]. Впрочем, подготовка преподавателей высокой квалификации для современной школы не ограничивается магистратурой педагогического образования. Так, достаточно сильных выпускников готовит бакалавриат направления подготовки 01.03.01 Математика (профиль «Преподавание математики») института математики и информатики МПГУ. Большое внимание уделяет подготовке учителей Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (МГУ). Речь идет не только о подготовке специалистов в рамках классических и инновационных образовательных программ ведущего вуза России. Так, МГУ является одним из ресурсных центров проекта «Математическая вертикаль», осуществляя специальную подготовку учителей, желающих преподавать в классах вертикали и прошедших предварительных отбор [2].

Методические аспекты подготовки магистров педагогического образования к организации и проведению математических олимпиад для школьников

Как показывает многолетний опыт работы автора со студентами института математики и информатики МПГУ, при разработке занятий курса, посвященного олимпиадным задачам, необходимо учитывать два важных аспекта. Во-первых, нужно *научить* магистрантов *решать* олимпиадные *задачи*. Конечно, при обучении в бакалавриате студенты изучали соответствующие разделы математики (арифметика, теория графов, алгебра, геометрия, логика и т. д.). Но изучали они их в другом контексте: так, решать задачи по арифметике или теории графов — необходимое, но недостаточное условие для формирования навыка решения олимпиадных задач соответствующей направленности. Кроме того, в магистратуру приходят и бакалавры из других вузов, поэтому у обучающегося может не быть и самых элементарных навыков решения задач того или иного рода. Так что *учить* студентов *решать задачи* в любом случае придется. Во-вторых, мы должны *продемонстрировать* обучающимся основные *приемы «тиражирования»* олимпиадных *задач*. Это, с одной стороны, поможет студентам глубже осознать теоретические основы курса и, с другой стороны, даст им практические навыки, востребованные в дальнейшей профессиональной деятельности. Кроме того, как показал опыт работы, такого рода деятельность повышает мотивацию студентов к изучению математики, дает им возможность почувствовать красоту и элегантность математических задач, вселяет в них уверенность в своих профессиональных силах [4].

Практическая реализация: арифметика

Рассмотрим реализацию такого подхода в рамках курса по выбору «Олимпиадные задачи по арифметике», который автор читает с 2015 года (следует отметить, что зарождение описываемой методики уходит корнями в 90-е годы прошлого века, когда в учебных планах математического факультета МПГУ присутствовала дисциплина «Арифметика; практикум по решению задач») [8–10].

Основная «математическая» идея состоит в следующем: опираясь на теоремы элементарной теории чисел, хорошо знакомые студентам (те, кто не владеют теорией, получают возможность быстро и эффективно освоить ее в ходе решения задач), показать, как формулировка конкретной задачи может быть обобщена без изменения ответа и схемы решения.

Например, рассмотрим такую задачу [8].

- **Докажите, что $3n^{11} + 8n + 22$ делится на 11 при любом натуральном n.**

Поскольку 8 сравнимо с –3, а 22 сравнимо с нулем по модулю 11, то в рамках поставленного вопроса исходное выражение эквивалентно выражению $\mathbf{3n^{11} - 3n}$, или, что то же, выражению $3(n^{11} - n)$. Таким образом, для решения задачи достаточно проверить, что n^{11} сравнимо с n по модулю 11 для любого натурального (на самом деле, целого) n. Данное утверждение можно проверить непосредственно, используя таблицу остатков по модулю 11. С другой стороны, данный факт вытекает из *малой теоремы Ферма*: *для любого целого числа n и любого простого числа p разность $n^p - n$ делится на p.*

Опираясь на свойства сравнений, мы можем утверждать, что для любых целых t, k и m число 3 сравнимо с $3 + 11t$, число 8 сравнимо с $-3 + 11k$, и число 22 сравнимо с $11m$ (то есть с нулем) по модулю 11. Другими словами, мы можем перейти к общей «заготовке» задачи.

- **Докажите, что $(3 + 11t)n^{11} + (-3 + 11k)n + 11m$ делится на 11 при любом натуральном n.**

Выбирая параметры t, k и m «по вкусу» (например, так, чтобы полученные коэффициенты имели примерно равный «размер»), мы можем построить нужное количество вариантов задачи, отличающихся друг от друга по формулировке, но совпадающих по сути, то есть имеющих один и тот же ответ и одно и то же решение. Ниже приведены четыре примера возможных вариантов.

- **Докажите, что $113n^{11} + 129n + 10989$ делится на 11 при любом натуральном n.**
- **Докажите, что $146n^{11} + 118n + 10978$ делится на 11 при любом натуральном n.**
- **Докажите, что $168n^{11} + 173n + 11143$ делится на 11 при любом натуральном n.**
- **Докажите, что $212n^{11} + 195n + 11374$ делится на 11 при любом натуральном n.**

В принципе, этого вполне достаточно для разумного тиражирования задачи.

Однако можно реализовать и следующий уровень обобщения. Пользуясь сформулированной выше малой теоремой Ферма (точнее, ее канонической версией), легко получить более общую «заготовку», заменив n^{11} на n^{1+10u}, где u — любое целое неотрицательное число. Действительно, воспользуемся основной формулировкой *малой теоремы Ферма*: *для любого простого числа p и любого целого n, взаимнопростого с p, число* n^{p-1}*сравнимо с* 1 *по модулю p*. Из теоремы немедленно следует, что $n^{u(p-1)}$ сравнимо с 1 по модулю p при любом целом неотрицательном u, и, следовательно, $n^{u(p-1)+1}$ сравнимо с n по модулю p при любом целом неотрицательном u. Таким образом, мы получаем следующую «заготовку».

- **Докажите, что $(3 + 11t)n^{1+10u} + (-3 + 11k)n + 11m$ делится на 11 при любом натуральном n.**

Еще один совершенно «бесплатный» бонус. Поскольку $11m$ сравнимо с нулем по модулю 11, то на это слагаемое можно «навесить» все, что угодно, например, любую натуральную степень n^g числа n. В этом случае «заготовка» примет следующий вид.

- **Докажите, что $(3 + 11t)n^{1+10u} + (-3 + 11k)n + (11m)n^g$ делится на 11 при любом натуральном n.**

Заметим, что та же задача может быть преобразована и путем других формулировок, в том числе: «Найдите остаток от деления $3n^{11} + 8n + 22$ на 11»; «На какую цифру оканчивается $3n^{11} + 8n + 22$ в системе счисления с основанием 11?»; «При каких натуральных n дробь $\frac{3n^{11} + 8n + 22}{11}$ является целым числом?» и т. д.

Перейдем к еще одной «заготовке», введя параметр r, который может принимать целые значения от 0 до 10.

- ***Найдите остаток от деления* $(3 + 11t)n^{1+10u} + (-3 + 11k)n + (11m)n^g + (r + 11h)$ *на* 11.**

Такая формулировка позволит нам, меняя r, варьировать ответ (но не решение) задачи, в этом случае выражение дает остаток r при делении на 11 при всех натуральных n.

Наконец, ничего не меняя в формулировках, мы получим общую «заготовку», используя вместо 11 произвольное простое число p.

- ***Найдите остаток от деления* $(a + pt)n^{1+(p-1)u} + (-a + pk)n + (pm)n^g + (r + ph)$ *на* p.**

В этом случае, задав простое число p, фиксируя величину r, выбрав ее из набора 0, 1, 2, …, $p - 1$ и произвольным образом варьируя целые неотрицательные параметры a, t, u, k, m и g, мы получим целый спектр задач, имеющих одно и то же решение и один и тот же ответ r.

Такой подход легко реализовать в рамках практически всех разделов классической арифметики. Рассмотрим еще один характерный пример.

- ***Найдите остаток от деления* 2^{2021} *на* 7.**

Анализируя последовательные степени двойки, мы убеждаемся, что 2^1 дает остаток 2, 2^2 дает остаток 4, и 2^3 дает остаток 1 при делении на 7. Таким образом, начиная с четвертой степени, остатки начнут повторяться, и нам достаточно «исследовать» число 2021. Оно дает остаток 2 при делении на 3, следовательно, число $2^{2021} = (2^3)^{673}2^2$ сравнимо с 2^2, то есть дает остаток 4 при делении на 7. Опираясь на малую теорему Ферма, мы можем несколько обобщить решение: поскольку 2 и 7 взаимно просты, то 2^6 заведомо сравнимо с 1 по модулю 7 и, следовательно, $2^{2021} = (2^6)^{336}2^5$ сравнимо с 2^5, то есть дает остаток 4 при делении на 7. Приведенные рассуждения останутся верными при замене 7 на любое простое число p и n — на любое целое число, взаимно-простое с p. Тиражирование, как и ранее, опирается на следующую простейшую «заготовку».

- ***Найдите остаток от деления* $(2 + 7t)^{2021}$ *на* 7.**

Произвольным образом меняя целый параметр t, мы получим нужное нам количество копий уже решенной выше задачи; в каждом случае ответом будет служить число 4. Следующий уровень обобщения будет достигнут при замене числа 7 произвольным простым числом p и двойки — любым целым числом, не делящимся на p.

Очень красивые задачи можно получить, пользуясь арифметикой остатков при построении неопределенных уравнений второй и высших степеней, не имеющих решений в целых числах. Так, нетрудно проверить, что квадрат целого числа не может давать остатка 2 при делении на 3. Следовательно, уравнение $x^2 = 3y + 2$ не имеет целых решений (x, y). Используя свойства сравнений по модулю 3, мы немедленно получаем следующую простейшую «заготовку» для тиражирования соответствующей задачи.

- ***Найдите все целые решения* (x, y) *уравнения* $x^2 = 3ty + (2 + 3m)$.**

При построении копий можно произвольным образом варьировать целые параметры t и m. Впрочем, в рамках данной задачи потенциал для обобщений практически неисчерпаем. Приведем еще одну заготовку, в которой можно менять произвольным образом целые параметры u и t и натуральные параметры k и g.

- ***Найдите все целые решения* (x, y) *уравнения* $(3u + 1)x^{2k} + 3ty^g + (3m + 1) = 0$.**

На эту тему можно говорить очень долго; мы ограничимся приведением еще двух примеров аналогичных заданий из контрольной работы для слушателей курса.

- **Докажите, что число $29999999999^{29999999999} + 1$ делится на 30. Обобщите задачу. Получите 4 варианта задачи, используя ваши обобщения.**
- **Найдите все простые числа p, для которых число $7p^2 + 8$ является простым. Придумайте (или найдите) аналогичную задачу и решите ее. Обобщите вашу задачу. Получите 4 варианта задачи, используя ваши обобщения.**

Следующий этап работы — подготовка индивидуального исследовательского проекта (ИИП). Студентам предлагаются темы для методических разработок, например: «Последняя цифра», «Четность и нечетность», «Задачи с факториалом», «Аддитивные задачи с простыми числами», «Задачи с единицами», «Неопределенные уравнения: игры с остатками», «Простые алгоритмы». Каждый студент выбирает одну из представленных тем или свою тему, связанную с арифметикой. Пользуясь предложенными преподавателем и самостоятельно найденными источниками, студент подбирает 5 задач олимпиадного типа, решение каждой из которых основано на идеях и утверждениях, используемых в выбранном разделе арифметики. «Олимпиадность» задачи — характеристика в определенной мере субъективная — определяется ее формулировкой, как правило, имеющей текстовый характер с элементами занимательности. В качестве отчета студент предоставляет преподавателю файл, содержащий подробное обоснованное решение выбранных пяти задач. Для каждой из задач должен быть проведен анализ возможностей ее «тиражирования». На основе этого анализа студент разрабатывает общую «заготовку», позволяющую построить 4–5 «копий» базовой задачи. Для каждой «заготовки» автор проекта представляет одно общее решение, включающее в качестве частных случаев решения всех представленных в блоке заданий. После обсуждения результатов исследования с преподавателем и (в случае необходимости) их корректировки, студент представляет результаты исследования в ходе доклада с презентацией.

Практическая реализация: теория графов

Курс по выбору «Олимпиадные задачи по теории графов» был разработан одним из авторов недавно, в 2020/21 учебном году. Несмотря на возникавшие в ходе работы проблемы, связанные со спецификой тематики (широкий разброс используемых методов дискретного анализа, жесткая зависимость свойств тех или иных графов от их параметров, осложняющая возможное тиражирование, неразработанность «школьной» теории графов и др.), в целом реализовать описанный выше подход «обучение решению задач — обучение тиражированию задач» удалось [11–13].

Рассмотрим несколько примеров. В ряде задач, связанных с типом графов (полный граф, дерево, планарный граф и др.) или базовыми характеристиками графов (степени вершин, соотношение между набором степеней вершин и числом ребер и т. д.), тиражирование становится почти тривиальным, поскольку теоретические утверждения, которые лежат в основе решения, верны для графов на любом числе вершин. В этом случае дополнительные возможности мы получаем, меняя «сюжет» формулировки. Например, рассмотрим следующую задачу.

- **Рядом со школой волшебников Хогвартс было 16 деревень, между некоторыми из которых были проложены дороги. Известно, что из каждой деревни можно попасть в любую другую, притом по единственному маршруту. Сколько дорог было рядом с волшебной школой?**

Эта задача связана с темой «Деревья». Зная соотношение между числом вершин и числом ребер произвольного дерева, мы можем утверждать, что рядом с волшебной школой было 15 дорог. Простейшая «заготовка» получается при замене 16 на произвольное натуральное число n. Поскольку дерево на n вершинах имеет ровно $n – 1$ ребро, то ответ данной задачи: $n – 1$. Заменяя дороги на авиалинии, телефонные сети, обмен письмами и т. д., мы получаем достаточно возможностей для тиражирования.

Другой пример.

- **В США имеется 50 штатов. Каждый из них соединен с каждым другим штатом дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого штата можно было проехать в любой другой?**

Эта задача связана одновременно с темами «Полный граф» и «Деревья». Поскольку число ребер полного графа на n вершинах равно $n(n – 1)/2$, а число ребер дерева на n вершинах равно $n – 1$, то, вычитая из первой величины вторую, мы получим ответ $(n – 1)(n – 2)/2$. В частности, при $n = 50$ ответом является число 1176. Как и ранее, тиражирование заключается в замене конкретного числа 50 произвольным натуральным числом n, однако используемая модель значительно интереснее предыдущей. Заменяя Соединенные Штаты другой (реальной или воображаемой) страной или кардинально меняя сюжет (очень удобно ввести в рассмотрение, например, схему метро), можно построить достаточное количество копий первоначальной задачи.

Рассмотрим еще одну задачу, более интересную с точки зрения нашего подхода.

- **На школьном балу каждый мальчик станцевал с тремя девочками, а каждая девочка — с четырьмя мальчиками. Сколько мальчиков пришло на бал, если всего было девять девочек?**

В данном случае мы имеем дело с темой «Двудольные графы». Решение задачи сводится к анализу двудольного графа, одна из долей которого содержит x, а другая — y вершин, причем степень каждой вершины первой доли равна трем, а второй — четырем. Поскольку количество ребер графа не зависит от того, каким образом оно подсчитано, мы получаем уравнение $3x = 4y$; в нашем случае $y = 9$ и, следовательно, $x = 12$. На первый взгляд простейшее обобщение состоит в замене чисел 3 и 4 параметрами $3n$ и $4n$, где n — любое натуральное число. Однако в этом случае нужно внимательно следить за третьим числом 9: уже при $n = 3$ мы выйдем за пределы используемой в первоначальной формулировке модели. А вот если заменить любыми параметрами $3n$ и $9n$ величины 3 и 9, то такого сбоя не произойдет, и ограничения на n будут связаны только с текстом задачи: видимо, с 40 девочками станцевать каждому мальчику за один вечер все же не удастся. Впрочем, изменения, как и ранее, возможны путем модификации сюжета.

Рассмотрим «заготовку», основанную на предыдущей задаче, в условиях несколько иной сюжетной модели.

- **В школе олимпийского резерва каждый хоккеист дружит с $3n$ гимнастками, а каждая гимнастка дружит с 4 хоккеистами. Сколько хоккеистов учится в школе олимпийского резерва, если в ней учится $9n$ гимнасток?**

Решение каждой из полученных задач будет одним и тем же; одним и тем же будет и ответ: 12. Если позволить модификацию всех трех присутствующих в условии числовых величин, заменяя дополнительно 4 параметром $4k$, то схема решения не изменится, но «на выходе» мы получим ответ $12k$. Возможны и дальнейшие обобщения, которые потребуют лишь минимального внимания к структуре используемой модели. Приведем три дополнительных примера.

- **На физико-математической конференции каждый физик общался ровно с двумя математиками, а каждый математик — ровно с тремя физиками. Кроме того, известно, что на конференции выступал 31 докладчик, а для размещения участников было использовано 19 двухместных столов. Сколько человек участвовало в конференции?**
- **Несколько шестиклассников и семиклассников обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый шестиклассник пожал руку семи семиклассникам, а каждый семиклассник пожал руку шести шестиклассникам. Кого было больше — шестиклассников или семиклассников?**
- **На 8 марта каждый из 10 мальчиков подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько в классе девочек?**

Пользуясь приведенными выше рассуждениями, заинтересованный читатель легко решит каждую из задач и найдет свои возможности для ее тиражирования.

В отличие от арифметики, в теории графов достаточно часто можно столкнуться с ситуацией, когда изменение того или иного параметров в целях тиражирования приводит к разрушению модели и, как следствие, к грубым ошибкам в формулировках полученных заданий. Приведем один из таких примеров. Рассмотрим задачу, которая достаточно часто встречается в сборниках занимательных задач по теории графов, в тренировочных материалах, посвященных подготовке к олимпиадам того или иного уровня (например, ее можно найти на сайте МЦНМО) [11; 12].

- **В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не**

менее трех братьев. Докажите, что все семеро — братья.

Для решения достаточно предположить, что мальчики, не являющиеся братьями, в компании существуют. Предположим, что Вася и Петр не являются братьями. Тогда по условию задачи каждый из них имеет среди оставшихся пяти мальчиков, по крайней мере, по три брата. Но в этом случае у них есть общий брат, что приводит нас к противоречию. Итак, любые два мальчика из описываемой в задаче группы являются братьями.

Очень хочется обобщить задачу, заменив величину 7 величиной $7n$ и, возможно, величину 3 величиной $3n$. В отличие от рассмотренных выше примеров, ни переход к параметру $7n$ с сохранением величины 3, ни переход к двум новым параметрам $7n$ и $3n$ не спасут ситуацию. В первом случае достаточно рассмотреть граф, состоящий из n несвязных компонент, каждая из которых представляет собой 3-регулярный граф на 7 вершинах (или любой *3*-регулярный несвязный граф на $7n$ вершинах, содержащий хотя бы одну такую компоненту). Во втором — построить $3n$-регулярный граф на $7n$ вершинах, содержащий в качестве компоненты полный граф на $3n + 1$ вершине.

В качестве тем ИИП курса, посвященного олимпиадным задачам теории графов, были выбраны и удачно реализованы следующие: «Степени вершин графа», «Эйлеровы графы», «Графы с цветными ребрами», «Деревья в работе», «Лабиринты», «Плоские графы», «Двудольные графы», «Ориентированные графы», «Графы и бинарные отношения», «Графы и логические задачи», «Графы и комбинаторика» [7].

Конечно, успехи в рамках внедрения предлагаемого нами подхода при изучении студентами теории графов пока очень скромны. Но начало положено, и, без сомнения, через несколько лет мы сможем поделиться с педагогической общественностью наработками, представляющими собой полноценную дидактическую модель, опирающуюся на весомую теоретическую базу и располагающую широким спектром практических предложений по всем разделам элементарной теории графов.

Московский государственный университет как ресурсный центр проекта «Математическая вертикаль»

Московский государственный университет, являясь признанным флагманом высшего образования России, одним из ведущих мировых образовательных и научных центров, вносит значительный вклад в подготовку отечественных специалистов различной направленности. В частности, именно из стен мехмата МГУ вышел целый ряд ведущих российских педагогов-математиков. Для анализа их вклада в развитие математического образования в России в целом и олимпиадного движения, в частности, потребуется отдельная статья, если не серьезный научный труд. В рамках нашей тематики мы коснемся лишь одного, но существенного с точки зрения реалий сегодняшнего дня вопроса, к практической реализации которого имеет непосредственное отношение один из авторов статьи. Дело в том, что Московский университет (Центр математического творчества при МГУ) является одним из ресурсных центров городского проекта Москвы в области образования «Математическая вертикаль» [2]. В классах проекта учатся дети, прошедшие специальный конкурс. Чтобы преподавать в этих классах, учителя также должны пройти тестирование. Среди прошедших тестирование учителей есть большой запрос либо на обновление и углубление знаний по тем или иным темам, изучавшимися ими ранее, либо на освоение новых для них разделов, востребованных в рамках проекта. Кроме того, для проекта созданы новые интересные учебники (есть положительные отзывы от самих учителей), в которых в качестве задач для самостоятельной подготовки школьников представлено много задач с муниципального (как минимум) тура Всероссийской олимпиады; конечно, учителя должны уметь их решать и, следовательно, их нужно этому научить [1]. Один из авторов статьи имеет большой опыт практической работы с учителями — участниками проекта, желающими повысить свой профессиональный уровень. На семинарах, проводимых под эгидой Центра математического творчества, рассматриваются важнейшие темы курса математики, в том числе «Делимость»; «Доказательство неравенств»; «Дополнительные построения, связанные с параллелограммом»; «Последовательности и прогрессии»; «Геометрия в негеометрических задачах»; «Метод математической индукции»; «Метод координат»; «Углы, связанные с окружностью».

Приведем примеры некоторых задач.

• **Найдите наименьшее значение суммы $|a| + |a + 1| + |a + 2| + ... + |a + 100|$.** (Тема «Геометрия в негеометрических задачах»; в данной задаче возможность элементарного тиражирования почти очевидна).

• **Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$.** (Тема «Доказательства неравенств»; указанная тема — не опечатка; предполагается рассмотреть решение, опирающееся на неравенство Коши).

• **Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $3x + 4y = 12$.** (Тема «Метод координат»; здесь, и это крайне существенно, есть два решения: алгебраическое и геометрическое).

• **Докажите, что точка *F* пересечения продолжения биссектрисы *AD* с окружностью, описанной около треугольника *ABC*, равноудалена от центра вписанной окружности и двух других вершин *B* и *C* треугольника.** (Тема «Углы, связанные с окружностью»; как правило, именно геометрические задачи плохо поддаются тиражированию).

• **Найдите $f(\ldots(f(f(6))))$, где $f(x) = 0{,}2x + 4$.** (Тема «Функции»; поскольку композиция функций берется n раз, то возможность элементарного тиражирования, как и в первой задаче, очевидна).

Заметим, что все представленные задачи (кроме геометрической) хорошо тиражируются. Хотя в рамках семинаров для учителей мы не ставим перед собой задачи обязательно научить слушателей основным приемам составления задач (главной целью является обучение их решению), мы так или иначе постоянно обращаем на эти вопросы внимание. Так, хорошо известны случаи, когда даже в заданиях заочного тура олимпиад по геометрии в некоторых (не всех) вариантах «проскакивали» невозможные ситуации, связанные как раз с неудачными попытками тиражирования нескольких копий одной и той же базовой задачи; в процессе обучения мы всегда обращаем на такие случаи особое внимание.

Заключение

Анализ результатов практической работы авторов по подготовке учителей математики к организации и проведению математических олимпиад для школьников позволяет судить о ее эффективности. Можно утверждать, что традиции фундаментального образования, уже не одно столетие практикуемого на механико-математическом факультете МГУ, более ста лет внедряемого на математическом факультете (с 2018 года — Институт математики и информатики) МПГУ, благополучно выдерживают испытания новыми веяниями и тенденциями, оставаясь незыблемыми в своей основе.

В качестве перспективных направлений дальнейшей работы в этой области можно выделить создание соответствующего учебно-методического обеспечения для реализации подхода «обучение решению задач — обучение тиражированию задач» в рамках других содержательных линий предметной подготовки магистров педагогического образования (логической, стохастической, криптографической и т. д.), внедрение элементов этого подхода в систему повышения квалификации практикующих учителей, знакомство с соответствующими приемами старшеклассников, углубленно изучающих математику [14–16].

Несомненный интерес представляет и создание в рамках учебно-исследовательской работы студентов практико-ориентированных разработок, направленных на другие аспекты фундаментализации школьного математического образования [17; 18].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Всероссийская олимпиада школьников. URL: https://vos.olimpiada.ru/ (дата обращения: 14.07.2021).
2. Устав автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования города Москвы «Центр педагогического мастерства». URL: https://cpm.dogm.mos.ru/about/statutory-documents/2026919/ (дата обращения: 14.07.2021).
3. *Попов, А.Н., Деза, Е.И.* Олимпиадные задачи по математике для начинающих (8–11 классы): 8 класс. Ч. 1. М.: URSS, 2021. 200 с.
4. *Деза, Е.И.* Ценностные приоритеты современного учителя математики // Материалы Международной научно-практической конференции «Профессионализм педагога: сущность, содержание, перспективы развития». М.: МАНПО, 2017. С. 332–334.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования (уровень подготовки магистратура, направление подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование»). URL: https://fgos.ru (дата обращения: 14.07.2021).
6. Педагогика и психология высшей школы: Учебное пособие / под ред. М.В. Булановой-Топорковой. Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. 544 с.
7. *Деза, Е.И.* Особенности реализации концепции создания индивидуальных траекторий фундаментальной подготовки учителя математики в условиях вариативного образования // Наука и школа. 2012. № 2. С. 28–34.
8. *Степанова, Л.Л., Жмулева, Л.Л., Деза, Е.И.* Практикум по элементарной математике. Арифметика. М.: МЦНМО, 2008. 208 с.
9. *Деза, Е.И., Котова, Л.В.* Сборник задач по теории чисел. М.: URSS, 2021. 224 с.
10. *Бухштаб, А.А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 386 с.
11. *Деза, Е.И., Модель, Д.Л.* Основы дискретной математики. М.: URSS, 2020. 224 с.
12. *Мельников, О.И.* Теория графов в занимательных задачах. М.: URSS, 2021. 240 с.
13. *Березина, Л.Ю.* Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979. 143 с.
14. *Агарева, О.Ю., Селиванов, Ю.В.* Элементы математической логики. М.: МАТИ, 2008. 52 с.
15. *Баврин, И.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2005. 160 с.

16. *Деза, Е.И., Котова, Л.В.* Введение в криптографию: Теоретико-числовые основы защиты информации. Москва: URSS: Ленанд, 2018. 368 с.
17. *Деза, Е.И., Модель, Д.Л.* Особенности построения учебных пособий в условиях интегративно-модульного подхода к обучению дискретной математике // Вестник МГПУ. Журнал Московского городского педагогического университета. Серия: Педагогика и психология. 2015. № 4(34). С. 84–89.
18. *Деза, Е.И., Котова, Л.В., Модель, Д.Л.* Современные средства математической подготовки студентов педагогических вузов // Проблемы современного образования. 2018. № 2. С. 147–155.

REFERENCES

1. *Vserossijskaya olimpiada shkolnikov* [All-Russian Olympiad of Schoolchildren]. Available at: https://vos.olimpiada.ru/ (accessed: 14.07.2021). (in Russ.)
2. *Ustav avtonomnogo obrazovatelnogo uchrezhdeniya dopolnitelnogo professionalnogo obrazovaniya goroda Moskvy "Centr pedagogicheskogo masterstva"* [Charter of the Autonomous Educational Institution of Additional Professional Education of the City of Moscow "Center for Pedagogical Excellence"]. Available at: https://cpm.dogm.mos.ru/about/statutory-documents/2026919/ (accessed: 14.07.2021). (in Russ.)
3. Popov, A.N., Deza, E.I. *Olimpiadnye zadachi po matematike dlya nachinayushchih (8–11 klassy): 8 klass, Ch. 1* [Olympiad Problems in Mathematics for Beginners (Grades 8–11): Grade 8, Part 1]. Moscow: URSS, 2021, 200 p. (in Russ.)
4. Deza, E.I. Cennostnye prioritety sovremennogo uchitelya matematiki [The Value Priorities of a Modern Mathematics Teacher]. In: *Professionalizm pedagoga: sushchnost, soderzhanie, perspektivy razvitiya: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* [The Professionalism of a Teacher: Essence, Content, Development Prospects: Materials of the International Scientific and Practical Conference]. Moscow: Mezhdunarodnaya akademiya nauk pedagogicheskogo obrazovaniya, 2017, pp. 332–334. (in Russ.)
5. *Federalnyj gosudarstvennyj obrazovatelnyj standart vysshego obrazovaniya (uroven podgotovki magistratura, napravlenie podgotovki 44.04.01 Pedagogicheskoe obrazovanie)* [Federal State Educational Standard for Higher Education (Master's Level, Training Area 44.04.01 Pedagogical Education)]. Available at: https://fgos.ru (accessed: 14.07.2021). (in Russ.)
6. *Pedagogika i psihologiya vysshej shkoly* [Pedagogy and Psychology of Higher Education: Textbook], ed. by M.V. Bulanova-Toporkova. Rostov-on-Don: Feniks, 2002, 544 p. (in Russ.)
7. Deza, E.I. Osobennosti realizacii koncepcii sozdaniya individualnyh traektorij fundamentalnoj podgotovki uchitelya matematiki v usloviyah variativnogo obrazovaniya [Features of the Implementation of the Concept of Creating Individual Trajectories of Fundamental Training of a Teacher of Mathematics in the Conditions of Variable Education], *Nauka i shkola* = Science and School, 2012, No. 2, pp. 28–34. (in Russ.)
8. Stepanova, L.L., Zhmuleva, A.V., Deza, E.I. *Praktikum po elementarnoj matematike. Arifmetika* [Workshop on Elementary Mathematics. Arithmetic]. Moscow: Moskovskij centr nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya, 2008, 208 p. (in Russ.)
9. Deza, E.I., Kotova, L.V. *Sbornik zadach po teorii chisel* [Collection of Problems on Number Theory]. Moscow: URSS, 2021, 224 p. (in Russ.)
10. Buhshtab, A.A. *Teoriya chisel* [Number Theory]. Moscow: Prosveshchenie, 1966, 386 p. (in Russ.)

11. Deza, E.I., Model, D.L. *Osnovy diskretnoj matematiki* [Fundamentals of Discrete Mathematics]. Moscow: URSS, 2020, 224 p. (in Russ.)
12. Melnikov, O.I. *Teoriya grafov v zanimatelnyh zadachah* [Theory of Graphs in Entertaining Problems]. Moscow: URSS, 2021, 240 p. (in Russ.)
13. Berezina, L.Yu. *Grafy i ih primenenie* [Graphs and Their Application]. Moscow: Prosveshchenie, 1979, 143 p. (in Russ.)
14. Agareva, O.Yu., Selivanov, Yu.V. *Elementy matematicheskoj logiki* [Elements of Mathematical Logic]. Moscow: Rossijskij gosudarstvennyj tekhnologicheskij universitet im. K.E. Kurchatova, 2008, 52 p. (in Russ.)
15. Bavrin, I.I. *Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow: Vysshaya shkola, 2005, 160 p. (in Russ.)
16. Deza, E.I., Kotova, L.V. *Vvedenie v kriptografiyu: Teoretiko-chislovye osnovy zashchity informacii* [Introduction to Cryptography: Theoretical and Numerical Foundations of Information Protection]. Moscow: URSS: Lenand, 2018, 368 p. (in Russ.)
17. Deza, E.I., Model, D.L. Osobennosti postroeniya uchebnyh posobij v usloviyah integrativno-modulnogo podhoda k obucheniyu diskretnoj matematike [Features of the Construction of Textbooks in the Conditions of an Integrative-Modular Approach to Teaching Discrete Mathematics], *Vestnik MGPU. Zhurnal Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya "Pedagogika i psihologiya"* = Vestnik Moscow City Pedagogical University, Series "Pedagogy and Psychology", 2015, No. 4(34), pp. 84–89. (in Russ.)
18. Deza, E.I., Kotova, L.V., Model, D.L. Sovremennye sredstva matematicheskoj podgotovki studentov pedagogicheskih vuzov [Modern Means of Mathematical Training of Students of Pedagogical Universities], *Problemy sovremennogo obrazovaniya* = Problems of Modern Education, 2018, No. 2, pp. 147–155.

Деза Елена Ивановна, доктор педагогических наук, профессор, кафедра теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет, elena.deza@gmail.com

Elena I. Deza, ScD in Education, Professor, Theoretical Informatics and Discrete Mathematics Department, Moscow Pedagogical State University, elena.deza@gmail.com

Попов Алексей Николаевич, ассистент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, alnppv@gmail.com

Alexey N. Popov, Assistant, Mathematical Analysis Department, Lomonosov Moscow State University, alnppv@gmail.com

Статья поступила в редакцию 23.08.2021. Принята к публикации 06.09.2021

The paper was submitted 23.08.2021. Accepted for publication 06.09.2021