

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ
ФИЛОСОФСКИХ ИДЕЙ Л. ВИТГЕНШТЕЙНА

Н.В. Медведев, Е.Е. Медведева

Аннотация. Статья посвящена обоснованию методологической значимости лингво-философских идей Л. Витгенштейна для предметной области педагогики математики. Несмотря на то, что Л. Витгенштейн не был теоретиком образования, в его сочинениях содержится множество описаний обучающих ситуаций, осмысление которых позволяет раскрыть основы педагогической деятельности учителя математики. В исследовании поясняется смысл витгенштейновской трактовки обучения как тренировки, выявляется правило-установленный характер обучения с опорой на метод языковых игр и аргумент о невозможности индивидуального языка. Показано, что социальная природа языка обуславливает необходимость использования общепринятых правил, осваиваемых индивидом в процессе обучения. Рассматривается способность учащихся выходить за пределы иллюстрируемых учителем примеров применения правила математики. Реконструируются ключевые принципы витгенштейновской модели преподавания математики: принцип следования правилу, принцип ведущей роли учителя. В результате выявлено прикладное значение философской педагогики Л. Витгенштейна; установлено, что математическое образование требует разработки особой педагогики, в которой процесс обучения математике рассматривается как правило-установленная деятельность, согласующаяся с практикой и традициями математического сообщества.

Ключевые слова: педагогика математики, обучение, тренировка, языковые игры, следование правилу, индивидуальный язык, скептический парадокс.

Для цитирования: Медведев Н.В., Медведева Е.Е. Педагогика математики в контексте философских идей Л. Витгенштейна // Преподаватель XXI век. 2021. № 3. Часть 2. С. 254–266. DOI: 10.31862/2073-9613-2021-3-254-266

Благодарности. Статья написана в рамках проекта РФФИ № 19-011-00254.

PEDAGOGY OF MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF THE PHILOSOPHICAL
IDEAS OF L. WITTGENSTEIN

N.V. Medvedev, E.E. Medvedeva

Abstract. The article substantiates the methodological significance of L. Wittgenstein's linguophilosophical ideas for the subject area of mathematics pedagogy. Despite the fact that L. Wittgenstein was not an educational theorist, his works contain many descriptions of learning situations, the comprehension of which provides a basis for the

© Медведев Н.В., Медведева Е.Е., 2021



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

pedagogical activity of mathematics teachers. The study explains the meaning of Wittgenstein's interpretation of learning as training, reveals the rule-established nature of learning with reliance on the method of language games and the argument about the impossibility of individual language. It is shown that the social nature of language determines the necessity of using generally accepted rules mastered by the individual in the process of learning. The ability of students to go beyond teacher-illustrated examples of mathematical rule application is examined. The key principles of Wittgenstein's model of mathematics instruction are reconstructed: the principle of rule following, the principle of the teacher's leading role. The applied significance of Wittgenstein's philosophical pedagogy has been brought to light. It has been established that mathematics education demands the development of a specific pedagogy which regards the teaching of mathematics as a rule-governed activity in keeping with the practices and traditions of the mathematical community.

Keywords: *pedagogy of mathematics, teaching, training, language games, rule-following, private language, skeptical paradox.*

Cite as: Medvedev N.V., Medvedeva E.E. Pedagogy of Mathematics in the Context of the Philosophical Ideas of L. Wittgenstein. *Prepodavatel XXI vek. Russian Journal of Education*, 2021, No. 3, Part 2, pp. 254–266. DOI: 10.31862/2073-9613-2021-3-254-266

Acknowledgement. The study is accomplished within the framework the project No. 19-011-00254 of the Russian Foundation for Basic Research.

Введение. Математическое образование, направленное на формирование и развитие когнитивных способностей учащихся, находится в фокусе пристального внимания государства и научного сообщества. Уровень математической науки и математического образования оказывает влияние на материальное благополучие страны и жизненный успех ее граждан. Эффективность выполнения задачи совершенствования процесса преподавания математики в школе во многом зависит от того, как учитель понимает природу математики и основы обучения, как он интерпретирует цели и средства математического образования. Ответы на эти вопросы выступают в качестве неявных предпосылок в деятельности учителя математики. Такие вопросы относятся к предметной области философии математики, которая служит опорой для педагогики математики [1, с. 204]. Другими словами, философский аспект математического образования присутствует в качестве неустраняемого компонента в деятельности любого преподавателя математики.

В этой связи несомненный интерес для педагогической науки представляют идеи выдающегося мыслителя Л. Витгенштейна (1889–1951), зачинателя социально-конструктивистского подхода в философии математики [2], предложившего рассматривать «математическую практику такой, какая она есть» [3, с. 166]. Идеи витгенштейновской философии служат плодотворным источником для обсуждения различных педагогических проблем. Несмотря на то, что Л. Витгенштейн не был теоретиком образования, его поздние сочинения содержат множество описаний обучающих ситуаций, анализ которых, на наш взгляд, позволяет выявить основы процесса обучения математике, аргументировать особую, базирующуюся на принципе «следование правилу» философию математики. Актуальность темы исследования, таким образом, обусловлена необходимостью концептуализации философской педагогики Л. Витгенштейна, способной расширить наше понимание природы математического образования.

Целью статьи является обоснование методологической значимости лингвофилософских идей Л. Витгенштейна для предметной области педагогики математики. Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач: во-первых, определить значение термина «обучение» в работах позднего Л. Витгенштейна; во-вторых, обосновать правило — установленный характер обучения с опорой на метод языковых игр и аргумент о невозможности индивидуального языка; в-третьих, выявить условия реализации принципа «следования правилу» при обучении математике; в-четвертых, раскрыть роль учителя в витгенштейновской модели преподавания математики.

Обучение как тренировка. Понятие «обучение» играет исключительно важную роль в работах Л. Витгенштейна зрелого периода творчества. Он подчеркивал, что обучение первоначальным формам языка есть не объяснение, а тренировка [4, с. 19]. Вместе с тем вопрос о том, что именно Л. Витгенштейн подразумевал под словом «обучение», стал предметом спора в академической среде [5, с. 130]. В частности, утвердилось мнение, что под «обучением» австрийский философ подразумевал процесс приобретения индивидом способности следовать правилам так же, как, например, стажер учится последовательно выполнять действия, которые демонстрирует ему опытный наставник.

Определенную ясность в обсуждение данного вопроса вносит перевод употребляемого Л. Витгенштейном немецкого слова *Abrichtung* на русский язык. Буквально оно переводится как «тренировка», «натаскивание», «муштра». В немецких словарях синонимом данного термина выступает слово *Dressur* («дрессировка»), которое наводит на мысль, что под *Abrichtung* Л. Витгенштейн, вероятно,

подразумевал специфическую форму обучения. Нужно также отметить, что термин *Abrichtung* обозначает дрессировку животных, например, собаки, которая должна приучиться строго выполнять команды своего хозяина. Если это действительно так, то можно быть уверенным в том, что отстаиваемый Л. Витгенштейном подход к обучению едва ли вызовет благосклонное отношение у педагогов, так как трудно согласиться с позицией, что детей нужно обучать так же, как дрессируют животных. Но тогда как объяснить взгляд Л. Витгенштейна на процесс обучения как на «тренировку» или «дрессировку»?

Согласно Л. Витгенштейну, обучение в форме тренировки предшествует всякому обоснованию. Это процесс, посредством которого ученика *посвящают* в правила конкретной языковой игры, в нашем случае — математической игры. Чтобы осмысленно участвовать в языковой практике, индивиду необходимо, прежде всего, научиться правилам поведения, т. е. вести себя сообразно с правилами уже обученных данной игре людей. В данном контексте термин «обучение» (*Abrichtung*) выглядит вполне уместным, поскольку только так можно привить учащимся привычку разумно действовать в языковой игре после того, как будут изучены ее правила. Критерий понимания в этом случае выражается в умении индивида правильно применять навыки языкового общения [6, с. 107].

Первоначальное обучение выглядит у Л. Витгенштейна как слепое копирование правил поведения или подражание опытным участникам игры. Это дает возможность учащемуся рационально действовать в рамках языковой игры. Занимаемая участниками игры позиция прямого послушания или безмолвного подчинения вовсе не отрицает и не ставит под сомнение рациональный характер игры. Скорее

это можно интерпретировать так, что всякое обучение предполагает принятие учащимися установки доверия своему опытному наставнику при освоении правил игры. Это есть неперемutable условие для осуществления полноценного обучения языковой практике, поддерживаемой правилами. Без согласованного набора правил, которые осваиваются учениками в процессе обучения, понятия «правильный» и «неправильный» утрачивают свой смысл, они становятся бесполезными. Другими словами, без понятий «правильный/неправильный» невозможно осуществлять образовательный процесс [7, с. 4]. Поэтому ученики посредством непрерывных тренировок должны овладевать правилами игры, чтобы принять в ней деятельное участие. В этом суть обучения как специфической социальной практики.

Языковая игра как модель рационального поведения учащихся. Наряду с понятием «обучение» центральное место в философии языка позднего Л. Витгенштейна занимает понятие языковой игры. Понятия «язык» и «игра» рассматриваются философом как сопоставимые. В своих работах он часто прибегает к использованию примера игры в шахматы, чтобы показать, что в языке, как и в любой игре, существуют правила. Правила языка называются грамматическими. Основная их функция состоит в проведении допустимых границ рационального поведения участников игры. Аналогия языка с игрой, по-видимому, заинтересовала Л. Витгенштейна в связи с тем, что в любой игре правильный ход можно определить только после того, как он будет сделан. Точно так же значение слова в языковой игре устанавливается после его употребления [4, с. 17, 21, 22, 26–27].

Понятие языковой игры охватывает у Л. Витгенштейна не только процесс употребления слов. При помощи модели

языковых игр он желал установить надежный критерий для определения рационального поведения людей в любой форме деятельности. «Рациональное» поведение, — как пишет британский философ М. Оукшот, — неизменно составляет противоположность тому типу поведения, которое не руководствуется никакими сознательно принятыми правилами, принципами или канонами» [8, с. 42]. Поэтому осмысленное поведение человека должно осуществляться, по Л. Витгенштейну, в соответствии с общепринятыми правилами, которые регулируют действия участников игры. Для полноценного участия в языковой игре требуется, с одной стороны, знание правил, с другой — понимание того, как нужно действовать в соответствии с правилами. Л. Витгенштейн вовсе не настаивал на том, что знание правил есть достаточное условие для участия в языковой игре. Само по себе правило не обуславливает способ его надежного применения, поскольку оно может быть интерпретировано по-разному. Этот факт порождает парадокс, связанный с проблемой следования правилу [4, с. 130].

Правило сравнивается Л. Витгенштейном с дорожным указателем [там же, с. 70]. Это означает, что цель обучения состоит в том, чтобы научиться верно истолковывать указатель, понимать, в каком направлении следует двигаться. Обучение игре представляет собой коммуникативный процесс взаимодействия педагога с учащимися. Для того чтобы полноценно заниматься определенной деятельностью, ученик должен научиться следовать правилу, он должен уметь интерпретировать указатель (т. е. требования педагога) *правильно*: «И потому, — как подчеркивает Л. Витгенштейн, — «подчинение правилу» будет практикой. И думать, что некто подчиняется правилу, не значит

подчиняться правилу. Посему невозможно подчиняться правилу «единолично»: иначе думать, что подчиняешься правилу, и подчиняться ему было бы тем же самым» [там же, с. 131].

Языковой знак, выполняющий функцию руководства, не может быть индивидуальным. Одна из главных идей Л. Витгенштейна заключается в том, что человеческий индивид не способен создать семантически корректную языковую игру при отсутствии партнеров по коммуникации. Данная идея широко известна в современной философии как «аргумент против индивидуального языка» [там же, с. 140, 141, 144, 148]. Этот аргумент подробно разбирался зарубежными и отечественными исследователями. Заслуга Л. Витгенштейна как философа состоит в опровержении гипотезы о возможности индивидуального языка. Он доказал, что язык имеет социальную природу, поскольку нельзя обосновать ни с логической, ни онтологической точки зрения доступность значения слов лишь тому человеку, который их употребляет. Индивидуальный язык, по его определению, не может быть доступен никому, кроме самого говорящего на таком языке [6, с. 67]. Опровержение возможности существования индивидуального языка влечет за собой вывод о том, что потенциальный пользователь такого языка не способен понимать даже самого себя. Почему это так? Дело в том, что носитель индивидуального языка находится в равном положении с другими участниками языковых игр; он должен переводить словарь своего языка на семантически доступный пониманию язык других людей. Тем самым опровергается предположение о возможности существования индивидуального языка. Таким образом, постулирование возможности индивидуального языка есть бессмысленное утверждение,

поскольку такой язык не может быть понят даже его воображаемым носителем. Л. Витгенштейн говорит о том, что люди не играют в языковые игры наедине с собой, что они непременно участвуют в рациональной коммуникации с другими пользователями языка. При этом все носители языка применяют один и тот же набор согласованных правил, которые об- ваиваются ими в процессе *обучения*.

Следует подчеркнуть, что проблема индивидуального языка имеет немаловажное значение для обсуждения вопроса о том, что значит изучать доступные пониманию вещи? Если мы будем рассматривать проблему изучения разнообразных языков, которые охватывают естествознание, математику, искусство, историю, религию, мораль, политику в контексте обсуждаемой нами проблемы индивидуального языка, то вскоре сможем понять, что *любое обучение* изначально представляет собой социально поддерживаемую практику, схожую с тренировкой. Отметим также, что Л. Витгенштейн не отрицает потенциальную возможность для индивида как полноправного участника языковой игры вносить свой творческий вклад в определенную форму социальной деятельности посредством конструирования новых идей или модернизации правил игры. И все же главным для него была идея о том, что процесс рационального обмена мнениями может осуществляться только при помощи конвенционально установленных правил и процедур, которые являются общественным, а не индивидуальным инструментом познания. Способность обучаемых быть носителями естественного языка одновременно подразумевает их умение пользоваться правилами языковой игры, применять их сообразно действиям других участников.

Следование правилу на основе согласия. Важное место в разработке

модели языковых игр принадлежит понятию «следование правилу». В соответствии с философской установкой Л. Витгенштейна, объяснение процесса формирования определенных умений и навыков учащихся, их интеллектуальных способностей требует того, чтобы мы увязали это с процессом усвоения правил игры. Только так можно достичь понимания условий применения конвенционально поддерживаемых общественных норм. Как было показано выше, знание правила недостаточно для того, чтобы ученик стал искусным пользователем языка или полноценным участником языковой игры. Правила — это только стрелки, которые указывают направление движения. Например, знание индивидом правила перемещения фигуры коня на шахматной доске еще не гарантирует того, что он всегда будет делать ход «конем» правильно. Поэтому в процессе шахматной игры ее участник должен постоянно демонстрировать, что он обучен правильно перемещать фигуру на шахматной доске в соответствии с ситуацией, как это делают опытные шахматисты. Как утверждает З.А. Сокулер, «недоопределенность правил является принципиальной» [9, с. 49]. Подтверждение этой мысли мы находим и у В.А. Ладова [10, с. 34].

Описанную ситуацию мы можем экстраполировать на процесс обучения математике. Так, школьник может выучить наизусть формулу нахождения корней квадратного уравнения, но если он не может применить эту формулу для решения математической задачи, то нельзя достоверно утверждать, что он владеет языком математики в соответствии с принятыми в математическом сообществе правилами применения данной формулы. Сама по себе формула не служит руководством к действию. Правило не снабжено инструкцией относительно того, как правильно

его нужно интерпретировать и применять. Именно об этом идет речь у Л. Витгенштейна в его парадоксе следования правилу. Другими словами, правило, как дорожный знак [4, с. 70], просто указывает направление движения. Чтобы быть уверенным в том, что ученик правильно применяет правило, требуется что-то еще. Л. Витгенштейн в данном случае вновь прибегает к понятию «обучение», чтобы прояснить обозначенную проблему: «Следование правилу сходно с подчинением приказу. Мы обучаемся делать так; мы реагируем на приказ особым образом. Но что, если один человек на приказ и на обучение реагирует так, а другой иначе? Что будет правильным?» [4, с. 131]. Он приходит к выводу, что разрешить данную проблему можно только через обращение к общим моделям поведения носителей языка [там же, с. 132]. И все же хочется спросить: почему ключ к решению проблемы правильной интерпретации языкового знака лежит в плоскости общественной практики как основы для согласия? Почему Л. Витгенштейн убежден в том, что наличие правила недостаточно для определения правильного способа его применения? Но разве мало иметь правило-стрелку?

Теперь попытаемся ответить на эти вопросы. Сам по себе знак-указатель не разграничивает человеческое действие на правильное и неправильное, на соответствующее или не соответствующее. Эта тема заостряется английскими философами Г. Бейкером и П. Хакером: «...Никакая интерпретация ... не может определенно зафиксировать, *посредством самого себя*, что считать согласованным» [цит. по: 10, с. 15].

Блестящий пример рассмотрения этой проблемы, которая известна в современной философии под именем «скептический парадокс», приводится в работе

С. Крипке «Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке» (1982). Расширяя границы обсуждения сформулированной Л. Витгенштейном проблемы следования правилу, С. Крипке предлагает нам поразмышлять над интересной головоломкой, связанной с простым математическим правилом сложения. Он доказывает, что данное правило невозможно объяснить, полагаясь только на само правило. Для этого С. Крипке описывает ситуацию, когда учитель сталкивается однажды с учеником («эксцентричным скептиком»), который воспринимает функцию сложения как «квус» (\oplus), определяя ее так:

$x \oplus y = x + y$, если x и $y < 57$, но $x \oplus y = 5$ в других случаях [11, с. 22].

Описанное С. Крипке концептуальное замешательство заставляет нас всерьез задуматься над особенностями процесса преподавания математики. Действительно, в описанной ситуации ученик складывает числа так, как его научили пользоваться операцией сложения в случае, если складываемые числа меньше «57». Согласно С. Крипке, это связано с тем, что конечное число примеров, иллюстрируемых ученику в процессе обучения, естественным образом подводит его к определенному выводу относительно произвольно выбранного числа «57». Однако беспокойство за результат обучения наступает после того, как ученика просят выполнить уравнение « $68 + 57$ », на что он отвечает, что сумма этих чисел будет равна «5». Новая функция, которую С. Крипке называет «квус», схожа с правилом сложения для всех чисел меньше 57. Однако при рассмотрении числа равного или больше «57» ответом ученика в случае применения функции «квус» будет «5».

С. Крипке поясняет, почему описанная им ситуация проблематична: «Итак, если скептик предлагает эту гипотезу серьезно,

то он сумасшедший, ибо столь причудливая гипотеза, как предположение о том, что я всегда подразумевал квус, является абсолютно дикой. Она, несомненно, дика; нет сомнений, что она ложна. Но, если она ложна, тогда должен быть некоторый факт относительно моего прошлого употребления, который можно привлечь для её опровержения. Ибо хотя гипотеза и является дикой, она не кажется *a priori* невозможной» [там же, с. 24]. Увы, невозможно предложить веское оправдание, чтобы опровергнуть замечание скептика. Похоже, что правило сложения применяется учеником «вслепую», и он приходит к ответу «125», а не «5» без какой-либо основополагающей причины. Как итог, конечное число примеров, демонстрируемых ученику в процессе обучения правилу с целью его применения, не поможет нам преодолеть возражение крипкевского скептика.

Но что из этого следует? Должны ли мы, ссылаясь на скептический парадокс, прийти к заключению о невозможности убедительно обосновать способность ученика выходить за пределы той информации, которую предлагает ему учитель в виде конечного набора примеров? Как раз наоборот: «скептический парадокс» высвечивает тот аспект обучения, который не затрагивает область «внутреннего», психического, но позволяет нам понять, как ученик способен выходить за границы иллюстрируемых ему примеров, чтобы продолжить применять правило *правильно*. Л. Витгенштейн, отвечая на вопрос «Как можно следовать правилу?» [12, с. 261], заявляет следующее: «Истинно, что *все* как-нибудь может быть оправдано. Но явления языка основываются на регулярности, на согласии в действии. Здесь величайшую важность имеет то, что мы все или подавляющее большинство из нас согласны в определенных

вещах. ... Но критерием этого согласия не является лишь согласие в одеянии из определений, например, указывающих определений, но *также* согласие в суждениях. Сущностным для взаимопонимания является то, то мы согласны в значительном числе суждений» [там же, с. 262]. Выражение «согласие в суждениях» здесь следует понимать как согласие в «форме жизни» или практике [4, с. 25].

В другом высказывании Л. Витгенштейн разъясняет, как можно научить ученика следовать правилу: «...я буду учить его ... посредством *примеров и практики*. И, занимаясь этим, я сообщу ему не меньше, чем знаю сам» [там же, с. 132]. Такое обучение принимает следующую форму: «Я делаю это, он повторяет за мной; я влияю на него, выражая согласие, отрицание, ожидания, одобрение. Я позволяю ему идти своим путем или велю вернуться назад и так далее [там же, с. 133]. Итак, способность ученика выходить за пределы конечного числа приводимых примеров применения правила есть важная цель обучения предмету.

Общее согласие есть необходимая предпосылка для того, чтобы следовать правилам. Это априорное условие располагается за пределами той информации, которую учитель предлагает ученику в виде конечного множества примеров, призванных прояснить значение используемых для решения задач понятий, законов, формул. Разумеется, мы почувствуем неудовлетворенность, когда нам предложат в качестве объяснения ссылку на общее согласие. Скорее всего, мы попытаемся найти другое основание для оправдания того, почему ученик, опираясь на ограниченное число примеров действия правила, обычно выбирает верную интерпретацию его применения. Однако все наши объяснения, направленные на преодоление сомнения, подойдут к концу

и уступят место нашей обыкновенной убежденности или необоснованной вере. Как говорит Л. Витгенштейн, «исчерпав обоснования, я достиг камня, и моя лопата согнулась. И я склонен говорить: «Это просто то, что я делаю» [4, с. 135]. Как бы то ни было, но приводимые основания вскоре исчерпываются, и это подводит нас к принятию следующего вывода: «Подчиняясь правилу, я не выбираю. Я повинуюсь правилу слепо» [там же, с. 136]. Правило проявляет себя в том, как его применяют в жизненной практике все те, кто имеет серьезную теоретическую подготовку. Правило «подчеркивает линии, которым предстоит следовать через все пространство» [там же].

Итак, следование правилу выглядит как основанное на постоянной тренировке побуждение ученика к действию. Функция правила раскрывается через множество тщательно подобранных примеров, которые позволяют ученикам прокладывать путь к бесконечному числу возможностей его применения. Принцип следования математическому правилу, пожалуй, является ключевым моментом в обучении математике. Его основополагающая функция обусловлена природой математического знания. «Математика *нормативна*», — заявляет Л. Витгенштейн [13, с. 200]. Абстрактные конструкции, алгебраические нормы и соглашения, законы арифметики, геометрии, тригонометрии, математические формулы — все это предстает перед нами в виде синтаксических, схожих с указателями, правил, которые подталкивают учащихся к выполнению определенных действий. Однако осмысленное применение математических правил достигается посредством интерпретирующего понимания. Такое понимание реализуется через подражание действиям опытного эксперта, учителя математики. Иначе говоря, основание для

оправданного употребления понятий «правильное» или «неправильное» возникает лишь тогда, когда проблема понимания математического правила выносится в область математических конвенций людей, имеющих основательную математическую подготовку.

Роль учителя в обучении математике. Обширные области математики по своей сути схожи с правилами, все математические предложения (формулы) имеют свой синтаксис. Определяющей чертой математики является ее абстрактность, логичность, что характеризует данную дисциплину как формально-логическую. К примеру, принципы исчисления пропозиций, составляющие основу аналитического и логического мышления в абстрактной математике, имеют явное сходство с правилами. Математика как наука опирается на правила. Основания математики, которые особенно интересовали Л. Витгенштейна, являются аксиоматическими. Вместе с тем, способность ученика заучивать и воспроизводить на память правила, которые составляют основу математического мышления, еще не говорит нам ничего о том, как он будет применять их на практике и сможет ли успешно заниматься математикой. Как отмечает Л. Витгенштейн, «всякий знак по *отдельности* кажется мертвым... — Он *живет* в употреблении. Имеет ли он дыхание жизни в самом себе? — Или его жизнь в *употреблении*?» [4, с. 195]. Для педагогики математики крайне важным является то обстоятельство, что заучивание правил не есть достаточное условие, чтобы сформировать у ученика способность решать простые или сложные математические задачи. Учитель математики должен рассматривать синтаксис правила как указатель, он должен, так сказать, «оживить» математические символы, формулы, т. е. проиллюстрировать ученикам

характерные способы применения правил математики. Это достигается посредством примеров и практики [там же, с. 132]. Учитель математики, выполняя в присутствии своих учеников математические упражнения, по сути, воспроизводит в классе ту практику, которая является общепринятой в математическом сообществе. Обладая профессиональными навыками, он показывает ученикам, как нужно производить математические вычисления, как решать математические задачи. Ученик, признавая авторитет учителя, соглашается с ним, и, вместе с тем, он соглашается с общей математической практикой. Без такого согласия невозможно обучение математике и, соответственно, невозможно достижение прогресса в освоении математических знаний. Поэтому обесценивание роли учителя в образовательном процессе неизбежно повлечет за собой выхолащивание базовых для педагогического дискурса понятий «правильное» и «неправильное». Обучение математике должно быть сосредоточено на демонстрации способа, каким достигается согласие в правилах математики. Только так ученики смогут научиться следовать правилам языковой игры математики. Любые попытки избежать необходимости соблюдения правил или достигать общего согласия относительно способов их применения будут препятствовать пониманию математической науки. Для того чтобы оправдать даже простейшие формы обучения математике, требуется признать, что согласие с математической традицией и доминирующей математической практикой играет центральную роль в формировании математических представлений учащихся.

Учителя математики, по словам У. Китчена, выступают в виде солидарного «мы» [7, р. 15]. Согласие между ними

обнаруживается в том, как они взаимодействуют друг с другом, как решают математические задания вместе с учениками. С помощью слов и жестов педагог обучает ребенка ясно понимать все то, что понимает он сам. В итоге он приводит его к согласию со своей точкой зрения, а значит, и точкой зрения всего математического сообщества. Однако воображаемый собеседник Л. Витгенштейна ставит под сомнение справедливость такой интерпретации математической практики: «Но ты в самом деле объясняешь другому то, что понимаешь сам? Разве ты не понуждаешь его *догадываться* о сути? Ты приводишь ему примеры — но он должен угадать их назначение, угадать твое намерение» [4, с. 133–134]. На это Л. Витгенштейн говорит следующее: «Всякое объяснение, которое даю себе, я даю и ему. — «Он угадывает, что я имею в виду» означало бы: различные истолкования моего объяснения приходят ему на ум, и он выбирает одно из них. И в этом случае он может спросить, а я могу и должен ему ответить» [там же, с. 134]. Л. Витгенштейн не потворствует философским попыткам найти «первоисточник» поведения учащегося в скрытом умственном процессе, именуемым «пониманием» [там же, с. 195], он подчеркивает важность согласованной практики для применения математических правил. Такая практика есть «следование правилу» [13, с. 201–202].

Итак, преподавание математики с позиции витгенштейновской философии основано на принципе «следования правилу». Учитель в витгенштейновской модели обучения играет ведущую роль, он выполняет функцию арбитра, который должен следить за правильностью ходов в языковой игре математики. Описанная нами модель обучения математике, акцентирующая высокий статус педагога,

вполне оправдана, поскольку учитель владеет правилами математики, он знает, как эти правила применять при решении математических задач. Подобное знание и понимание приобретает учеником через тренировку, строгое соблюдение правил, усвоение суждений и действий учителя математики как эксперта. В конечном итоге понимание математики достигается через согласие с правилами математического сообщества, через включенность обучаемого и обучающего в традицию математической науки.

Заключение. На основании проведенного исследования можно сделать определенные выводы. Анализ витгенштейновского подхода к обучению, основанный на применении понятий «языковая игра», «следование правилу», указывает на то, что усвоение основных принципов математической науки требует разработки новых подходов. В современную эпоху образования, когда практически повсеместно происходит критическое переосмысление традиционных методов обучения, важно задуматься о том, почему педагогике математики требуются новые подходы для осмысления процесса математического образования [14, с. 5]. Философская педагогика Л. Витгенштейна стимулирует поиски ответа на поставленную проблему. Его лингвофилософские исследования, направленные на устранение концептуальных замешательств в различных сферах человеческой деятельности, способны оказать влияние на формирование особой педагогики математики, основанной на принципе следования правилу.

Витгенштейновская трактовка процесса обучения как тренировки призвана обосновать способность ученика рационально действовать в рамках языковой игры. Первоначальное обучение представлено у Л. Витгенштейна как слепое

копирование правил поведения и подражание опытным участникам игры.

Математические предложения являются правилами (формулами, законами), которые сами по себе ничего не говорят о том, как их можно применять. Поэтому математические правила нуждаются в «оживлении», эту функцию выполняет профессиональное сообщество математиков, т. е. люди, имеющие фундаментальную математическую подготовку. Именно преподаватель играет ведущую роль в процессе обучения математике. Его призвание состоит в том, чтобы добросовестно, терпеливо выполнять свою миссию как представителя математического сообщества в учебных классах, он обязан транслировать нормы и максимы математического знания. Другими словами, учитель — это тот, кто способен «оживить» правила математической науки. Согласно Л. Витгенштейну, следование правилам математической игры требует согласия и активного участия партнеров. Только при таком условии можно утверждать, что правила

математики действительно осмысленно применяются учениками.

Реконструированная в статье витгенштейновская «грамматическая» модель обучения охватывает далеко не все аспекты математического образования. Вместе с тем репрезентируемые в этой модели основополагающие принципы обучения (принцип следования правилу, принцип ведущей роли учителя, принцип связи математики с жизнью, принцип доверия учащихся педагогу), обеспечивают ясное представление об особенностях функционирования языковых игр математики и возможностях преодоления в математической практике разнообразных концептуальных замешательств. Таким образом, подход Л. Витгенштейна к обучению позволяет понять, что главным в изучении математической науки является согласие с практикой, традициями математического сообщества. Без данной предпосылки изучение и преподавание математики как правило-установленная деятельность оказывается невозможным.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thom, R.* Modern mathematics: does it exist? // Howson A.G. Developments in mathematical education. Cambridge: Cambridge university press, 1973. P. 194–209.
2. *Ernest, P.* Social constructivism as a Philosophy of Mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1997. 315 p.
3. *Медведева, Е.Е.* Философия математики Людвиг Витгенштейна. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2016. 192 с.
4. *Витгенштейн, Л.* Философские исследования. М.: АСТ: Астрель, 2011. 347 с.
5. *Медведева, Е.Е.* Роль обучения в философии Л. Витгенштейна // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Философия. 2019. № 3 (33). С. 128–135.
6. *Медведев, Н.В.* Философия Людвиг Витгенштейна и проблемы понимания иных культур. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2009. 382 с.
7. *Kitchen, W.H.* Wittgensteinian pedagogy for mathematics. Rule-following, and why it matters for mathematics teaching and learning // Philosophy of Mathematics Education Journal. 2019. No. 35. P. 1–20. URL: <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/prmej/pome35/William%20H.%20Kitchen%20%20Wittgensteinian%20Pedagogy%20for%20Mathematics.pdf> (дата обращения: 11.02.2021).
8. *Оукиот, Майкл.* Рациональное поведение // Рационализм в политике и другие статьи / пер. с англ. М.: Идея-Пресс, 2002. С. 38–64.

9. Сокулер, З.А. Проблема «следования правилу» в философии Людвиг Витгенштейна и ее значение для современной философии математики // Философские идеи Людвиг Витгенштейна. М.: Изд-во Ин-та философии РАН, 1996. С. 37–54.
10. Ладов, В.А. Иллюзия значения: Проблема следования правилу в аналитической философии. Томск: Изд-во Томского ун-та, 2008. 326 с.
11. Крипке, Сол А. Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. М.: «Канон +» РООИ «Реабилитация», 2010. 256 с.
12. Витгенштейн, Л. Замечания по основаниям математики. Раздел VI // Хинтиikka Яаакко. О Витгенштейне. М.: «Канон +» РООИ «Реабилитация», 2013. С. 225–271.
13. Витгенштейн, Л. Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские исследования. В 2-х ч. Часть II. М.: Изд-во «Гнозис», 1994. 208 с.
14. Фоминых, Ю.Ф., Плотникова, Е.Г. Педагогика математики. Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 2000. 460 с.

REFERENCES

1. Thom R. Modern Mathematics: Does it Exist? In: Howson A.G. *Developments in Mathematical Education*. Cambridge, Cambridge University Press, 1973, pp. 194–209.
2. Ernest P. *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, N.Y., State University of New York Press, 1997, 315 p.
3. Medvedeva E.E. *Filosofiya matematiki Lyudviga Vitgenshtejna* [Philosophy of Mathematics of Ludwig Wittgenstein]. Tambov, Publishing House of TSU named after G.R. Derzhavin, 2016, 192 p. (in Russ.)
4. Wittgenstein L. *Filosofskie issledovaniya* [Philosophical Investigations]. Moscow, AST: Astrel Publishers, 2011, 347 p. (in Russ.)
5. Medvedeva E.E. Rol obucheniya v filosofii L. Vitgenshtejna [The Role of Teaching in the Philosophy of L. Wittgenstein]. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Filosofiya* = Voronezh State University Bulletin. Series: Philosophy, 2019, No. 3(33), pp. 128–135. (in Russ.)
6. Medvedev N.V. *Filosofiya Lyudviga Vitgenshtejna i problem ponimaniya inyh kultur* [Philosophy of Ludwig Wittgenstein and Problems of Understanding Other Cultures]. Tambov, Publishing House of TSU named after G.R. Derzhavin, 2009, 382 p. (in Russ.)
7. Kitchen W. H. Wittgensteinian Pedagogy for Mathematics. Rule-following, and Why it Matters for Mathematics Teaching and Learning, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 2019, No. 35, pp. 1–20. Available at: <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome35/William%20H.%20Kitchen%20%20Wittgensteinian%20Pedagogy%20for%20Mathematics.pdf> (accessed: 11.02.2021).
8. Oakeshott M. Racionalnoe povedenie [Rational Behavior]. In: *Racionalizm v politike I drugie stati. Perevod s angl.* [Rationalism in Politics and Other Articles]. Moscow, Idea Press, 2002, pp. 38–64. (in Russ.)
9. Sokuler Z. A. Problema sledovaniya pravilu v filosofii Lyudviga Vitgenshtejna I ee znanenie dlya sovremennoj filosofii matematiki [The Problem of the “Rule-Following” in the Philosophy of Ludwig Wittgenstein and Its Significance for the Modern Philosophy of Mathematics]. In: *Filosofskie idei Lyudviga Vitgenshtejna* [Philosophical Ideas of Ludwig Wittgenstein]. Moscow, Publishing House of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences, 1996, pp. 37–54. (in Russ.)

10. Ladov V.A. *Ilyuziya znacheniya: problema sledovaniya pravilu v analiticheskoj filosofii* [The Illusion of Meaning: the Problem of Rule-following in Analytical Philosophy]. Tomsk, Publishing House of Tomsk University, 2008, 326 p. (in Russ.)
11. Kripke Sol. A. *Vitgenshtejn o pravilah I individualnom yazyke* [Wittgenstein on Rules and Private Language]. Moscow, "Canon +" RPOD "Rehabilitation", 2010, 256 p. (in Russ.)
12. Wittgenstein L. *Zamechaniya po osnovaniyam matematiki. Razdel VI.* [Remarks on the Foundations of Mathematics. Section VI]. In: Hintikka Yaaakko. *On Wittgenstein*. Moscow, "Canon+" RPOD "Rehabilitation", 2013, pp. 225–271. (in Russ.)
13. Wittgenstein L. *Zamechaniya po osnovaniyam matematiki* [Remarks on the Foundations of Mathematics]. In: Wittgenstein L. *Philosophical Investigations*, in 2 parts, part II. Moscow, Publishing House "Gnosis", 1994, 208 p. (in Russ.)
14. Fominykh Yu.F., Plotnikova E.G. *Pedagogika matematiki* [Pedagogy of Mathematics]. Perm, Publishing House of Perm University, 2000, 460 p. (in Russ.)

Медведев Николай Владимирович, доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии и методологии науки, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, mnv88@mail.ru

Nikolay V. Medvedev, ScD in Philosophy, Professor, Chairperson, Department of Philosophy and Methodology of Science, G.R. Derzhavin Tambov State University, mnv88@mail.ru

Медведева Евгения Евгеньевна, кандидат философских наук, преподаватель, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, sem.23@mail.ru

Eugeniya E. Medvedeva, PhD in Philosophy, Lecturer, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, sem.23@mail.ru

Статья поступила в редакцию 12.04.2021. Принята к публикации 07.05.2021

The paper was submitted 12.04.2021. Accepted for publication 07.05.2021